Clase 1: Introducción

Lunes 11, Agosto 2025

Presentación

Brian Villegas Villalpando
Maestria en Matemáticas
Universidad de Bonn (Alemania)

brvillea@gmail.com

Lectura del programa + mapa curricular

Exámenes

↳ 4 exámenes en el semestre

- Unidad I ($\sim 5^{ta}$ Sem)
- Unidad II
- Unidad III
- Unidad IV

↳ Ponderación:

70% examen
30% tareas y otras actividades

↳ Asistencias: esiima

Objetivo del curso

En algún punto de nuestra educación aprendimos a resolver el sig. tipo de expresiones:

$$ax - b = 0 \quad , \quad a \neq 0$$

El problema consiste en encontrar el valor (o valores) de x que satisfacen la ecuación.

En general, la solución se ve así:

$$x = \frac{b}{a}$$

e.g. Resuelve

$$5x - 8 = 0$$

(0) $5x - 8 = 0$

(1) $5x = 8$

(2) $x = 8/5$

$\hookrightarrow$ $5(8/5) - 8 = 8 - 8 = 0$

e.g. Resuelve $8x - 14 = 0$

Q&A ¿Por qué $a \neq 0$?

- Razón 1:

  ↳ No se puede dividir entre cero

- Razón 2:

  ↳ Si $a = 0$, entonces la situación es trivial:

  $b = 0$ //

En este curso, nos interesa aprender a resolver sistemas de ecuaciones:

e.g.

$$\begin{cases} a_{11} x + a_{12} y - b_1 = 0 \\ a_{21} x + a_{22} y - b_2 = 0 \end{cases}$$ //

Aprenderemos a transformar este tipo de sistemas a la siguiente expresión:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = 0}_{A\underline{x} - \underline{b} = \underline{0}}$$

Q&A Comparemos

$$\underbrace{A\underline{x} - \underline{b} = \underline{0}}_{(1)} \quad \text{con} \quad \underbrace{ax - b = 0}_{(2)}$$

•) En (2), x, b, y 0 son números

¿Qué son $\underline{x}$, $\underline{b}$, y $\underline{0}$ en (1)?

Vectores (Unidad II)

•) En (2), $a \neq 0$ es un número.

¿Qué es A en (1)?

Matriz (Unidad II)

↳ Función (Unidad I y III)

•) La solución a (2) es

$$x = a^{-1}b = \frac{b}{a} \quad , \; a \neq 0$$

¿La ecuación (1) tiene solución?

No siempre ¿Cuándo sí?

Si tiene solución ¿Es única?

No siempre ¿Cuando sí?

•) ¿ Hay una versión similar a la expresión:

$$x = a^{-1} b \quad , \; a \neq 0 \quad ?$$

Sí, $\underline{x} = A^{-1} \underline{b}$. Sin embargo, A^{-1} requiere más pasos para calcular y requerimos que A tenga ciertas propiedades. //

En resumen, entender la expresión

$$A \underline{x} - \underline{b} = 0$$

y sus soluciones (si hay) será el objetivo del curso.

" 80 % de las matemáticas es álgebra lineal "

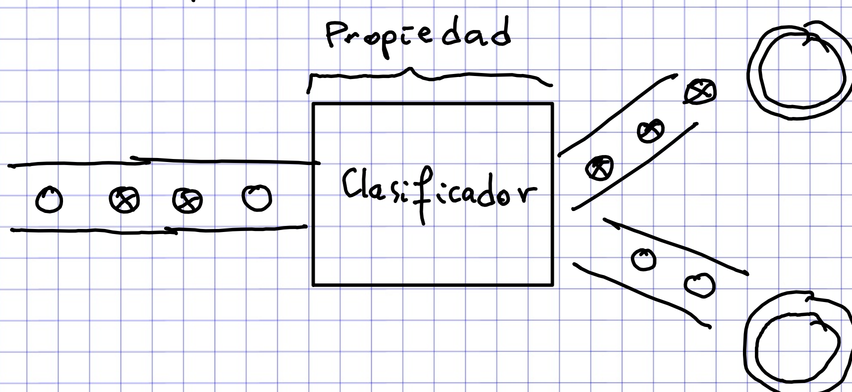
R. Bott

Clase 2 : Conjuntos y relaciones
Martes 12, Agosto 2025

Intuitivamente, una función es una "máquina" que transfoma objetos en objetos.

Para fomalizar esta idea comenzamos definiendo conjuntos:

<u>Def</u> (Conjuntos) Una colección de objetos que comparten una propiedad bien definida. //



<u>e.g.</u>
- Conjunto de animales marinos
- Conjunto de colores en el arcoiris
- Conjunto de países en América
- Conjunto de criaturas míticas griegas

Q&A ¿Qué hemos hecho hasta ahora?

¡Separar objetos!

① Tenemos una propiedad

¿De dónde?

② Nos dan un objeto

Decidimos si el objeto cumple la propiedad ③

④ Si el objeto cumpla la propiedad lo incluimos a la colección

Def (Conjunto universo) Es un conjunto que contiene todos los objetos relevantes para el problema o situación.

En la práctica, el conjunto universo se da naturalmente y debemos siempre hacerlo explícito

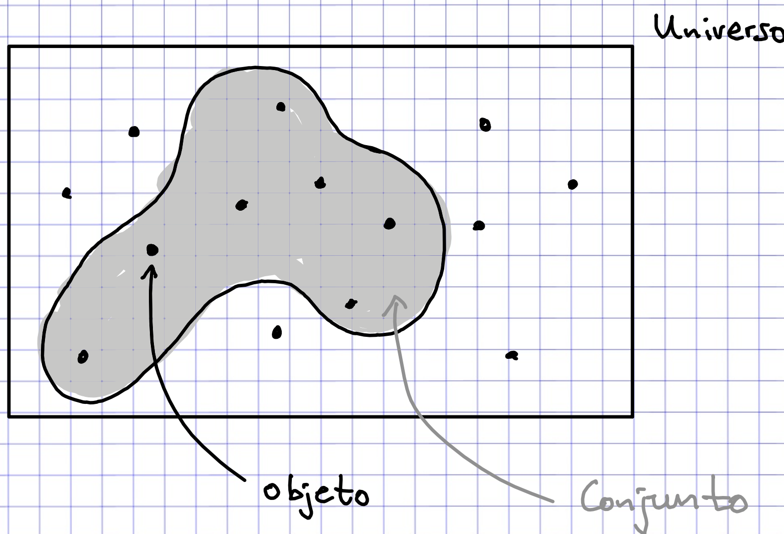
e.g. Un estudio se realiza a los trabajadores de una empresa. Se desea determinar si el uso de un fármaco mejora la productividad. Se administra el fármaco a empleados mayores a 35 años, y al resto se le da un placebo.

- Universo : Todos los trabajadores
- Propiedad : Mayores a 35 años.

e.g. Te han avisado que el fármaco tiene efectos secundarios para menores a 25 años. Considera esto para definir tu grupo de estudio.

- Universo : Empleados mayores a 25 años
- Propiedad : Mayores a 35 años.

Diagramas



Notación de conjuntos

objeto: minúscula

(1) $X = \{ \text{listado} \}$

(2) $X = \{ x \in \mathcal{U} \mid \text{propiedad} \}$

(3) $X = \{ x \mid \text{propiedad} \}$

Conjunto: mayúscula

e.g. $X = \{ \text{rojo, azul, amarillo} \}$

$X = \{ x \in \text{Colores} \mid x \text{ es un color primario} \}$

$X = \{ x \in \text{Animales} \mid x \text{ es un animal marino} \}$

<u>Q&A</u> ¿Qué significa "$\in$"?

Pertenece

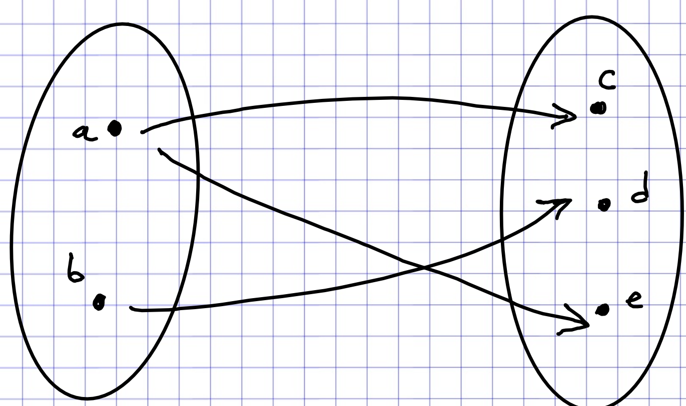
¿Cómo se denota a <u>no</u> pertenece?

$$\notin$$

<u>Def</u> Una relación entre los conjuntos X y Y es un conjunto de parejas de un objeto de X y un objeto de Y.

$$R(X,Y) := \left\{ (x,y) \;\middle|\; \begin{array}{l} x \in X \;\; \& \\ y \in Y \end{array} \right\}$$

<u>e.g</u>



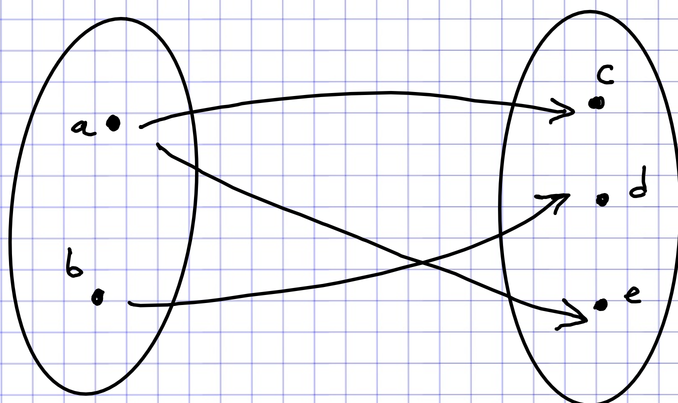
$$\{ (a,c), (a,e), (b,d) \}$$

Clase 3: Definicion de función

Jueves 14, Agosto 2025

Recordemos la versión gráfica de la definición de una relación:

e.g



$$R(X;Y)=\{(a,c),\ (a,e),\ (b,d)\}$$

Q&A ¿Cuándo dos conjuntos son iguales?

Consideren dos conjuntos, digamos X & Y. Para verificar que $X=Y$ debemos hacer lo siguiente:

(1) Tomen cualquier x en X
(2) Verifiquen x tambien está en Y } $X\subseteq Y$
(3) Tomen cualquier y en Y
(4) Verifiquen y también está en X } $Y\subseteq X$

e.g. (Té vs. Infusión)

$$T := \{ t \in \text{Sabores} \mid x \text{ es un sabor de té} \}$$

$$I := \{ i \in \text{Sabores} \mid x \text{ es un sabor de infusión} \}$$

Tenemos que $T \subseteq I$

"está contenido en"

pero $I \not\subseteq T$

"no está contenido en"

e.g.

$$X := \{ x \in \text{AlumnosUAA} \mid x \text{ toma clases en el aula 6L-CS, turno matutino, semestre Ago-Dic 2025 + más especificaciones} \}$$

$$Y := \{ y \in \text{AlumnosUAA} \mid y \text{ estudia Lic. BM en 1}^{\text{er}} \text{ Sem, Sem Ago-Dic 2025, Gpo B + más especificaciones} \}$$

En una relación $R(X;Y)$, donde X y Y son conjuntos cualesquiera, dos elementos

$$(x_1, y_1) \ \& \ (x_2, y_2)$$

son iguales si y solo si $x_1 = x_2$ & $y_1 = y_2$

e.g. Pensemos en el ejemplo inicial, definamos

$$\hat{R} := \{ (c,a), (e,a), (d,b) \}.$$

Esta es una relación de Y con X que se obtuvo de cambiar el orden de las parejas.

Q & A ¿Es $\hat{R}$ igual a $R(X;Y)$?

Depende... Tendríamos que revisar que

$$\hat{R} \subseteq R(X;Y) \quad \& \quad R(X;Y) \subseteq \hat{R}$$

En general, esto no es cierto. Por ejemplo, si a, b, c y d son todos distintos,

$$(a,c) \notin \hat{R} \quad \&$$

$$(c,a) \notin R(X;Y)$$

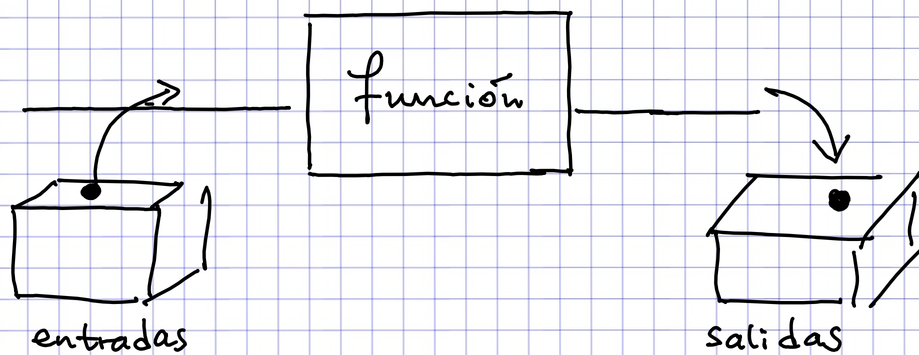
Moraleja: ¡El orden importa!

¿Qué tiene que ver esto con funciones?

Las funciones son un tipo de relación.

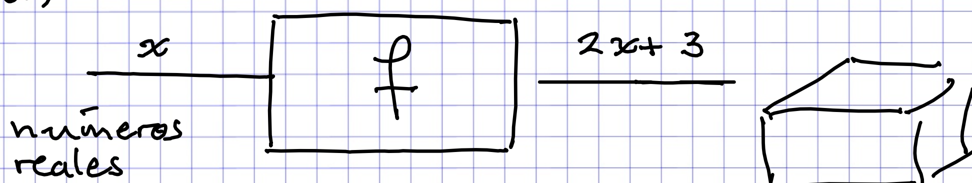
Definición de una función

Intuitivamente,

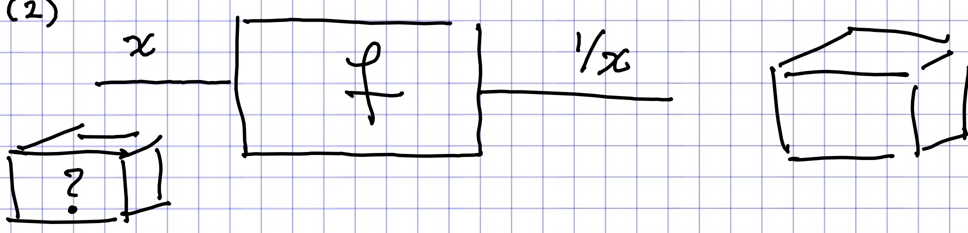


e.g.

(1)



(2)



Def (Función) Una función f es una es una regla de correspondencia que a cada elemento de un conjunto D, de un universo X, le asigna un único elemento $f(x)$ que pertenece a otro conjunto universo Y.

Clase 4: Dominios naturales I

Lunes 18, Agosto 2025

Recordemos que una función se denota de la siguiente forma:

$$f : D \subseteq X \longrightarrow Y$$
$$x \longmapsto f(x)$$

Q&A ¿Qué necesitamos saber para definir una función?

(1) Los conjuntos X y Y
(2) El conjunto D
(3) La regla de correspondencia
$$x \longmapsto f(x)$$

Q&A ¿Cómo se ve en notación los dos ejemplos de la clase pasada?

(1) $$f : \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto 2x + 3$$

"$\mathbb{R}$ sin el cero"

(2) $$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto 1/x$$

De ahora en adelante, nos enfocaremos en funciones de la forma

$$\begin{aligned} f: D \subseteq \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x). \end{aligned}$$

Estas son funciones de valor real en una variable real

Sin embargo, las funciones pueden emparejar cualquier tipo de objetos

e.g. •) A cada mexicano se le asigna un único NSS.

•) A cada alumno de la UAA se le asigna un único ID.

•) La función que a cada fruta le asigna su único color predominante.

Dominio Al conjunto D se le llama el dominio de la función y consiste de elementos (no necesariamente todos) que pueden ser evaluados en la regla de correspondencia de f.

e.g. •) $f : [0,1] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto f(x) = x+2$$

•) $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto g(x) = x+2$$

Obs (1) f y g tienen la misma regla de correspondencia.

(2) El dominio de f es $[0,1]$

(3) El dominio de g es $\mathbb{R}$

(4) f y g no son la misma función pues tienen dominio distinto.

¿Cómo calcular dominios naturales?

El dominio natural de una regla de correspondencia son todos los valores x donde $f(x)$ está definida.

Ej. Calcula el dominio natural de la regla de correspondencia

$$x \longmapsto f(x) = x+2$$

Sol Uno debe preguntarse ¿hay algún $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x+2$ no sea un número? Respuesta: $x+2$ siempre es un número. Por lo tanto, el dominio natural de $x+2$ es $\mathbb{R}$ y

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x+2 \end{aligned}$$

es la función asociada. //

<u>Ej</u> Calcular el dominio natural de la regla de correspondencia

$$x \longmapsto 1/x$$

<u>Sol</u> $1/x$ no es un número cuando $x=0$. Para cualquier otro x en $\mathbb{R}$ $1/x$ sí es un número. Por lo tanto, el dominio natural de $1/x$ es $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ y la función asociada es

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \subseteq \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 1/x \end{aligned}$$

//

<u>Ej</u> Calcular el dominio natural de la regla de correspondencia

$$x \longmapsto \sqrt{x}$$

<u>Sol</u> El valor de $\sqrt{x}$ no es un número

real cuando $-\infty \leq x < 0$, y es un número real cuando $x \geq 0$. Por lo tanto, el dominio natural de $\sqrt{x}$ es $[0, +\infty)$ y la función asociada es

$$f : [0, +\infty) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \sqrt{x}$$

Clase 5: Dominios naturales II

Martes 19 Agosto 2025 (Usando pantalla)

En esta clase vamos a calcular dominios naturales. Recordemos que:

Regla	Dominio natural
$y \mapsto 1/y$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
$y \longmapsto \sqrt{y}$	$[0, \infty)$

Calcule el dominio natural de las siguientes reglas de correspondencia:

(i) $x \longmapsto \sqrt{4x-2}$

Sol. Para que $\sqrt{4x-2}$ sea un número real requerimos que

$$4x - 2 \geq 0,$$

es decir, que $x \geq 2/4$.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} f : [2/4, +\infty) \subseteq \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sqrt{4x-2} \end{aligned}$$

es la función natural asociada.

(2) $x \longmapsto f(x) = \dfrac{2x-5}{x(x-3)}$

Sol Para que $\dfrac{2x-5}{x(x-3)}$ sea un número real requerimos que

$$x(x-3) \neq 0,$$

es decir, que $x \neq 0$ y $x \neq 3$. Por lo tanto, la función asociada es

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \setminus \{0, 3\} \subseteq \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \frac{2x-5}{x(x-3)} \end{aligned}$$

(3) $x \longmapsto f(x) = \dfrac{10}{\sqrt{1-x}}$

Sol Para que $\dfrac{10}{\sqrt{1-x}}$ sea un número real requerimos que

- $\sqrt{1-x} \neq 0$,
- $1 - x \geq 0$

es decir, que $\overbrace{x \neq 1 \;\&\; x \leq 1}^{x<1}$. Por lo tanto, la función asociada es

$$f : (-\infty, 1) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = \frac{10}{\sqrt{1-x}}$$

(4) $x \longmapsto f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 10x + 25}$

Sol Para que $\dfrac{1}{x^2-10x+25}$ sea un número real requerimos que

$$\underbrace{(x^2 - 10x + 25) \neq 0}_{(x-5)^2 \neq 0},$$

es decir, que $x \neq 5$. Por lo tanto, la función asociada es

$$f : \mathbb{R} \setminus \{5\} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = \frac{1}{x^2-10x+25}$$

Q&A $1/x$ & $\sqrt{x}$ no nos las únicas funciones que se pueden considerar. Otro ejemplo es el logaritmo natural,

$$\ln(x)$$

que está definido en $(0, \infty)$.

y se puede usar de manera combinada con las anteriores. Por ejemplo,

$$x \longmapsto \ln(1-x)$$

$$x \longmapsto 1/\ln(\sqrt{x-5})$$

$$\vdots$$

etc.

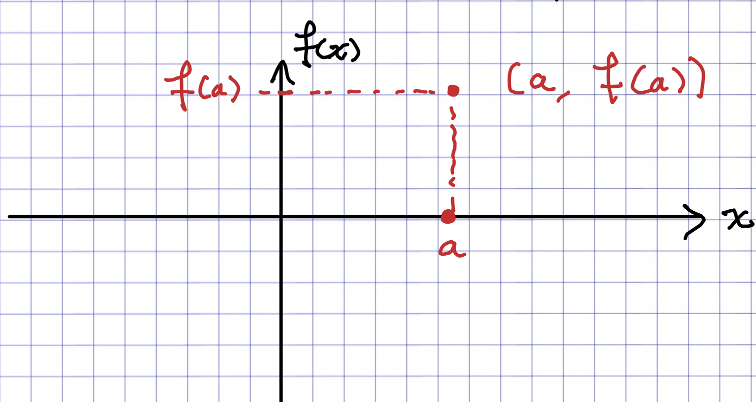
Por lo pronto, nos limitaremos a ejemplos como los anteriores: (1), (2), (3) & (4).

Evaluando funciones y puntos en el plano

Dada una función

$$f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x)$$

Un valor $f(a)$ se puede representar en el plano de la siguiente forma:



<u>Ejemplos en patalla</u>

<u>e.g.</u> Evalue los puntos $1/3, 1, 0$ de la función

$$\begin{aligned} f : [0,1] \subseteq \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x+6 \end{aligned}$$

<u>e.g.</u> Evalue los puntos $6, -6, 1, 0$ de la función

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{1}{x^2+1} \end{aligned}$$

Clase 6: Imagen y gráficas

Miércoles 20, Agosto 2025

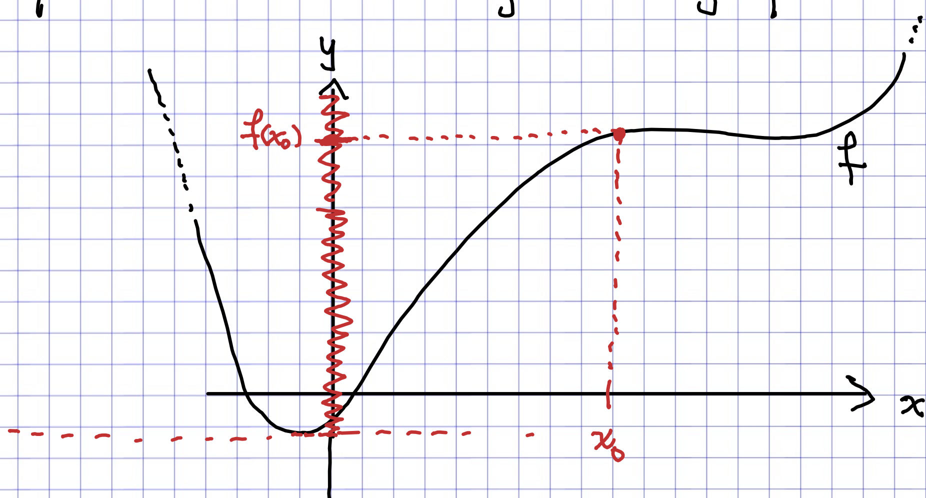
Consideremos una función

$$f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x)$$

El conjunto imagen de f es

$$\operatorname{Im}(f) := \{ f(x) \in \mathbb{R} \mid x \in D \}$$

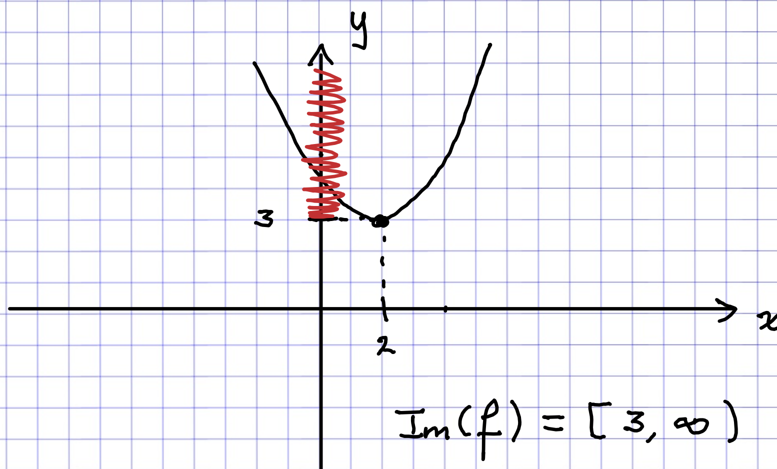
Veamos qué significa esto de forma gráfica. Suponga que si graficamos f obtenemos la siguiente gráfica



Veamos en la pantalla algunos ejemplos:

e.g

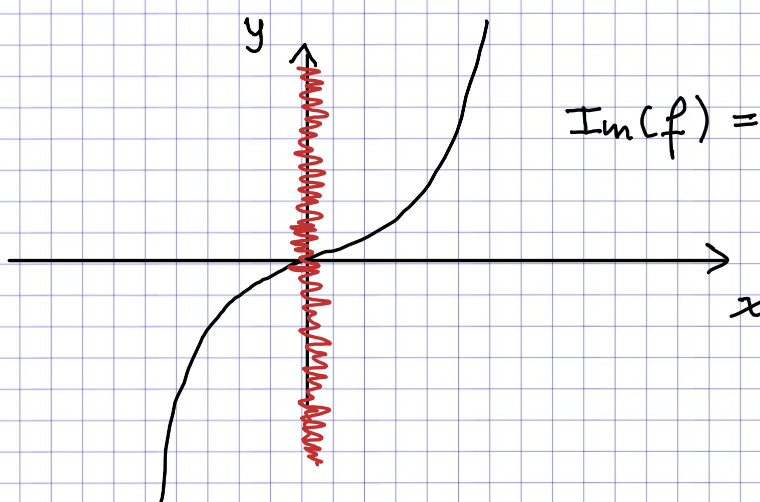
$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto (x-2)^2 + 3$$



$\mathrm{Im}(f) = [3, \infty)$

e.g.

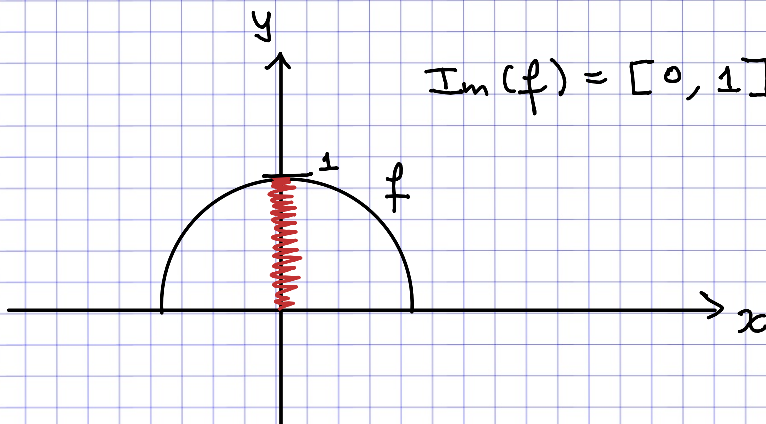
$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto x^3$$



$\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$

e.g. $f : [-1, 1] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \sqrt{1-x^2}$$



$\mathrm{Im}(f) = [0, 1]$

Función o no función

Consideremos una función

$$f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x)$$

Q&A ¿Cómo se relaciona esto con una relación? Mediante su gráfica...

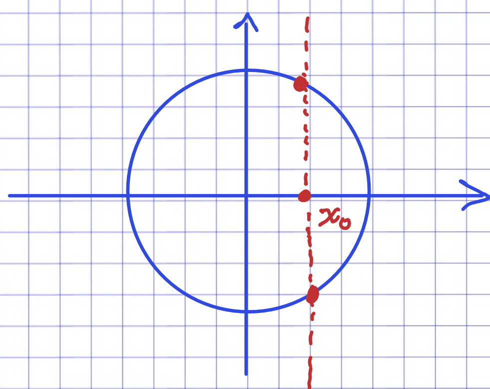
$$G(f) := \{ (x, f(x)) \mid x \in D \}$$

Dado que la gráfica de f es un conjunto de parejas, entonces es una relación.

Lo que nos interesa es saber cómo diferenciar relaciones que son funciones de las que no lo son.

Recordemos de la definición de función que esta asigna un único elemento a cada x en D.

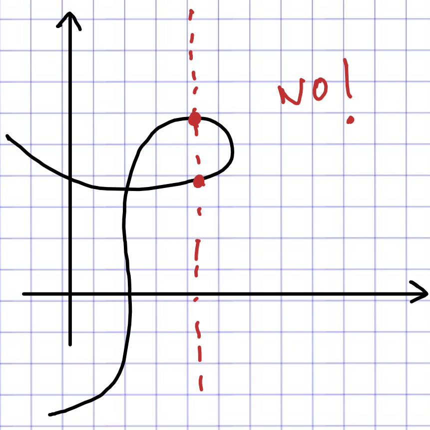
Q&A ¿Es el siguiente conjunto de parejas la gráfica de una función?

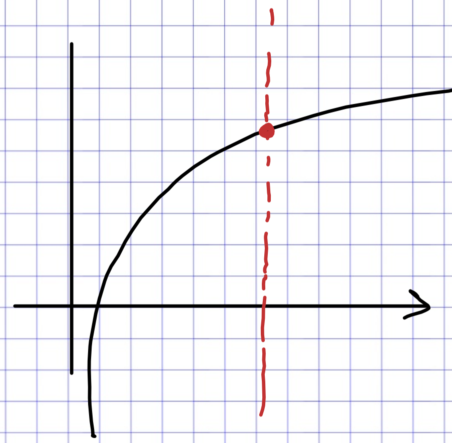


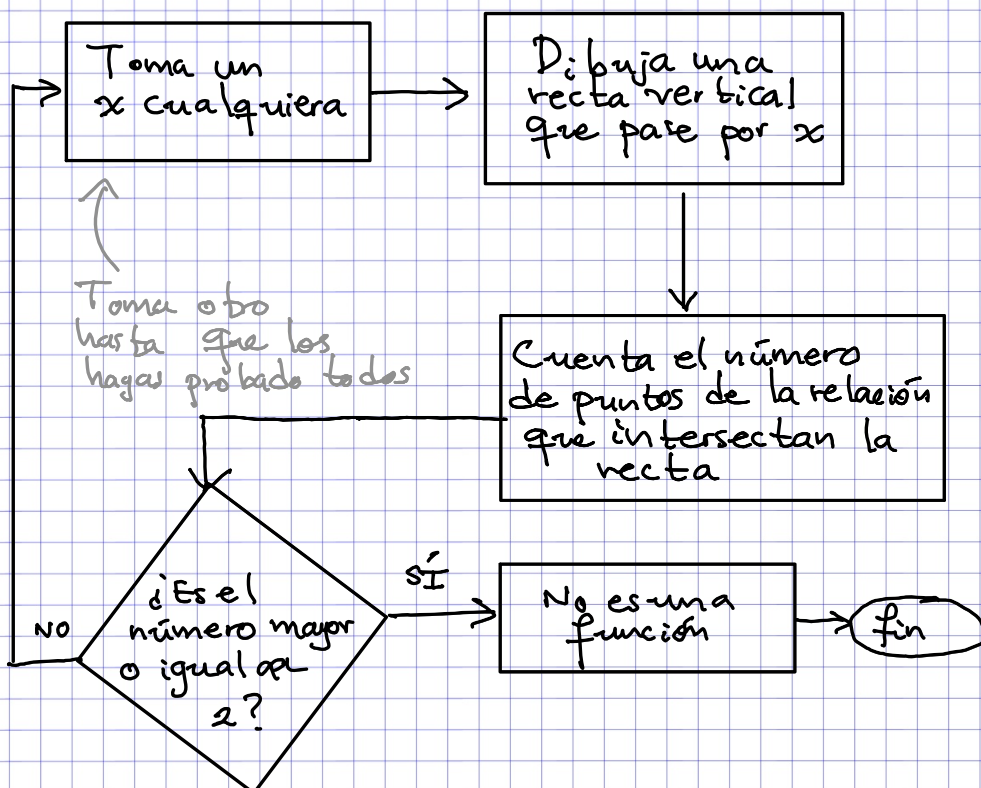
No, dado que x_0 NO tiene asignado un único elemento.

La situación anterior nos lleva a considerar el siguiente método para determinar si una relación es una función o NO

•) Método de líneas verticales







Q&A ¿Qué pasa si no tenemos la gráfica y solo las parejas de puntos?

Opción 1 ¡Grafícalos!

Opción 2 Compara las parejas

e.g. Considera la relación que a cada color le asigna una fruta cuyo color predominante es dicho color!.

{ (Rojo, Manzana)
(Naranja, Naranja)
⋮
(Rojo, Fresa)
(Amarillo, Platano) }

NO Función

Lo que debemos buscar es que la primer componente no tenga asociada dos o más segundos componentes.

e.g. $R = \{ (1,2), (2,5), (1,3) \}$

NO Función

Clase 7: Algunos tipos de funciones

Jueves 21, Agosto 2025

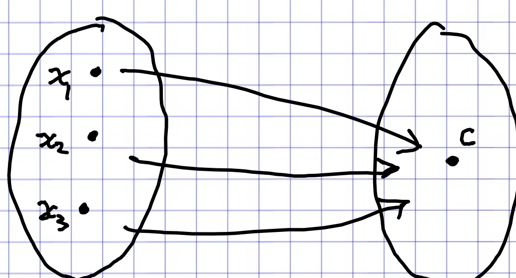
Al trabajar con funciones, uno puede estudiarlas y clasificarlas por una o algunas características. Algunas de estas son las siguientes:

Constantes

Una funcion

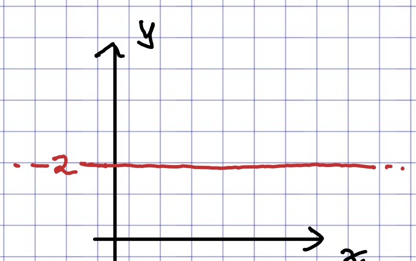
$$f : D \subseteq X \longrightarrow Y$$
$$x \longmapsto f(x)$$

es constante si toda $x \in D$ es enviada a una misma $c \in Y$.



e.g. La función

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto 2$$



es constante

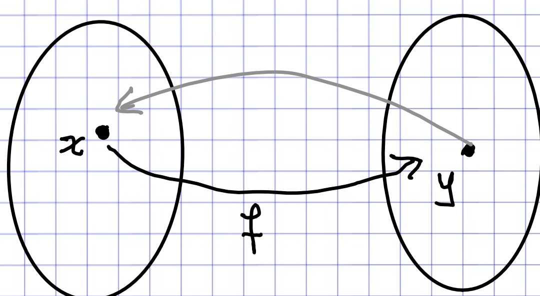
Sobreyectivas

Una función

$$f : D \subseteq X \longrightarrow Y$$
$$x \longmapsto y$$

es sobreyectiva si $\mathrm{Im}(f) = Y$, es decir, si para toda $y \in Y$ existe una $x \in D$ tal que

$$f(x) = y.$$



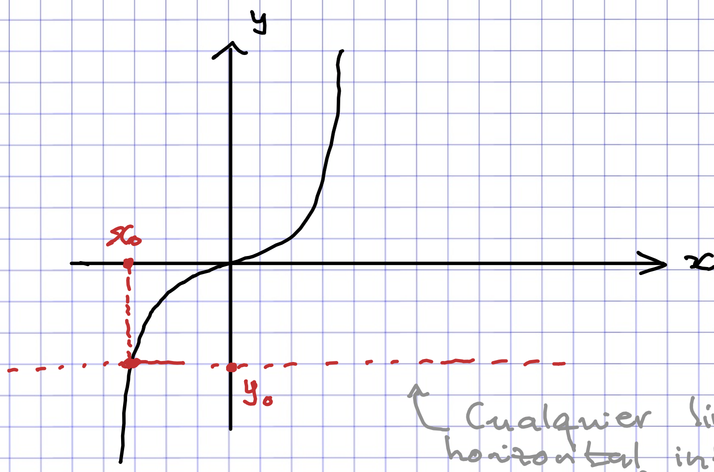
e.g. La función

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto x^3$$

es sobreyectiva. Ya que para toda y en $\mathbb{R}$, podemos tomar $x = \sqrt[3]{y}$. Así,

$$f(x) = (\sqrt[3]{y})^3 = y.$$

Mediante la gráfica,



Cualquier línea horizontal intersecta a la gráfica de la función

__e.g.__ (Contraejemplo)

Las funciones constantes, en general, no son sobreyectivas.

Esta línea horizontal nunca intersecta a la gráfica de f

__Inyectivas__ Una función

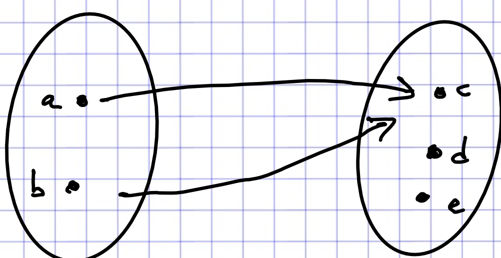
$$f: D \subseteq X \longrightarrow Y$$
$$x \longmapsto f(x)$$

es inyectiva si dos puntos distintos del dominio <u>NUNCA</u> se mandan a un mismo valor:

Si $x_1 \neq x_2$, entonces $f(x_1) \neq f(x_2)$

Equivalentemente:

Si $f(x_1) = f(x_2)$, entonces $x_1 = x_2$



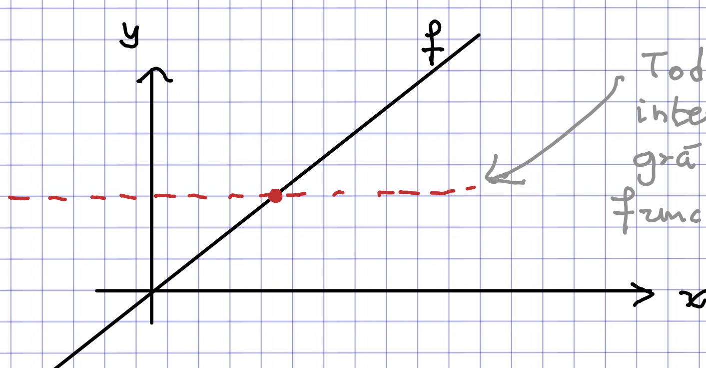
$a \neq b$

Esta asignación **NO** es inyectiva

e.g. La función

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto x$$

es injectiva.

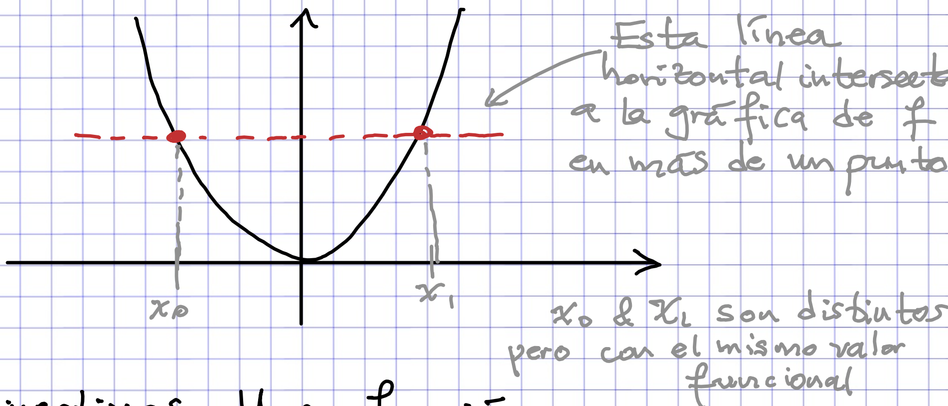


Toda línea horizontal intersecta a la gráfica de la función a lo más una vez.

e.g (Contraejemplo) La función

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto x^2$$

No es injectiva.



Biyectivas Una función

$$f: X \longrightarrow Y$$
$$x \longmapsto f(x)$$

es biyectiva si es sobreyectiva e inyectiva, es decir, si para toda $y \in Y$ existe una unica $x \in X$ tal que

$$f(x) = y$$

Importante: Observen que en la definición anterior $D = X$. Es posible definir funciones biyectivas cuando $D \subseteq X$, pero nos deja complicaciones innecesarios para nosotros.

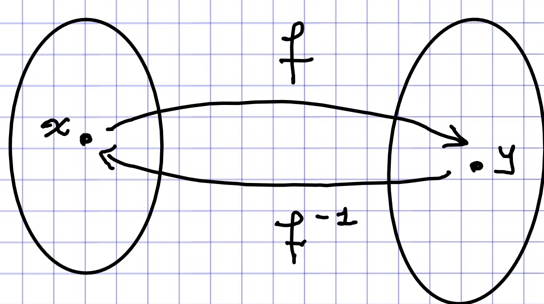
Para una funcion biyectiva, digamos f, existe una función asociada, denotada por f^{-1}, que "deshace" lo que f hizo.

__Def__ (Función inversa) Sea

$$\begin{aligned} f : X &\longrightarrow Y \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

una función biyectiva. Definimos

$$\begin{aligned} f^{-1} : Y &\longrightarrow X \\ y &\longmapsto f^{-1}(y) = x \ ; \quad f(x) = y \end{aligned}$$



__e.g.__ La función

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = x^3 \end{aligned}$$

es biyectiva

y su función inversa es

$$f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto x^{1/3} = \sqrt[3]{x}$$

<u>e.g.</u> (Contraejemplo) La función

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto x^2$$

no es bijectiva ¿Por qué? NO, es ni sobreyectiva ni inyectiva.

Clase 8: Retrospectiva

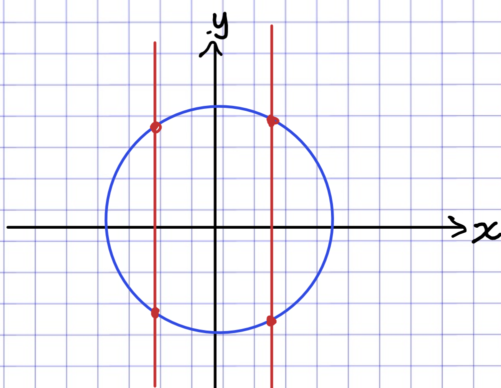
Viernes 22, Agosto 2025

Función o <u>NO</u> función

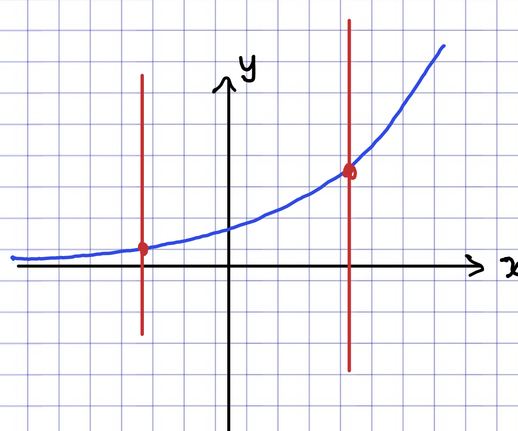
Recordemos que una función asigna a cada elemento del dominio un <u>único</u> elemento del contradominio.

$$\boxed{\begin{aligned} f : D \subseteq X &\longrightarrow Y \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}}$$

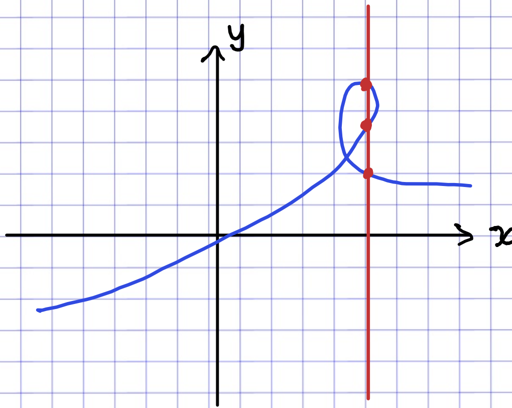
¿Son las siguientes funciones?



¡NO!

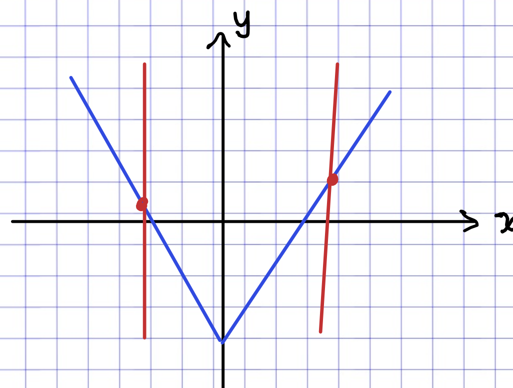


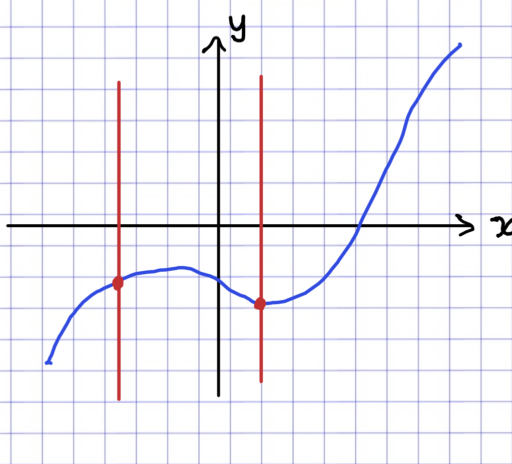
¡Si!



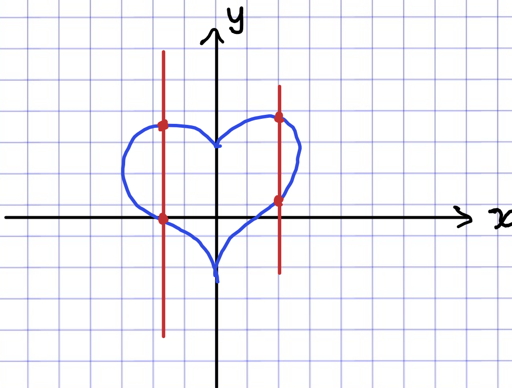
¡NO!

¡Si!

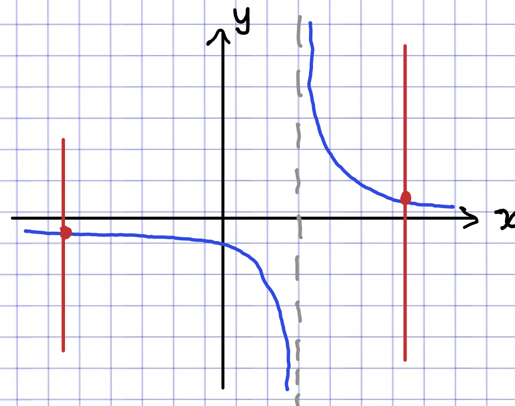




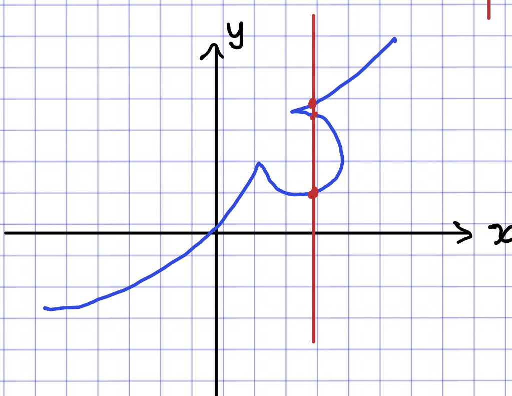
¡Si!



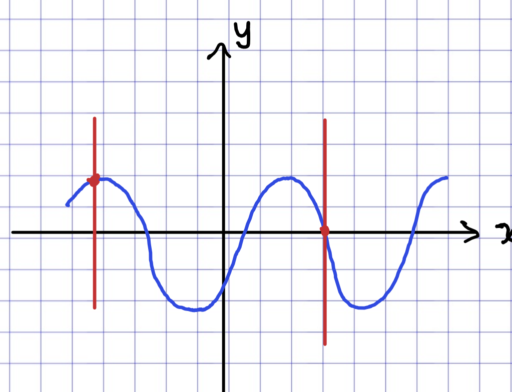
¡No!



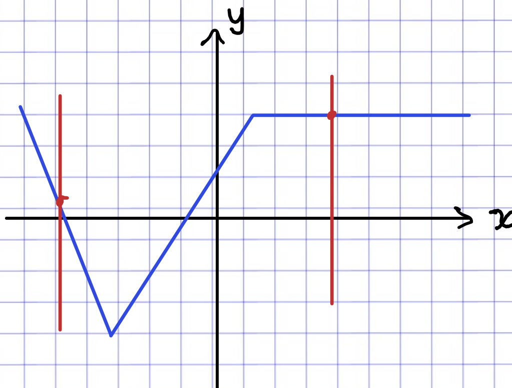
¡Sí!



¡No!

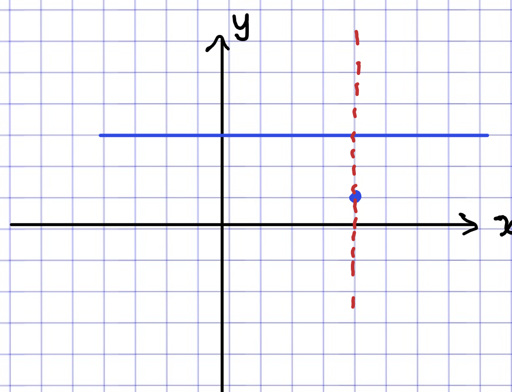


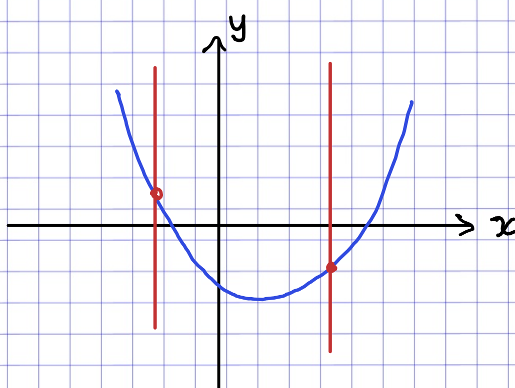
¡Sí!



¡Sí!

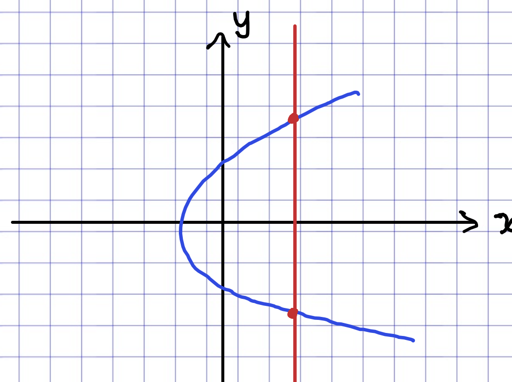
¡No!

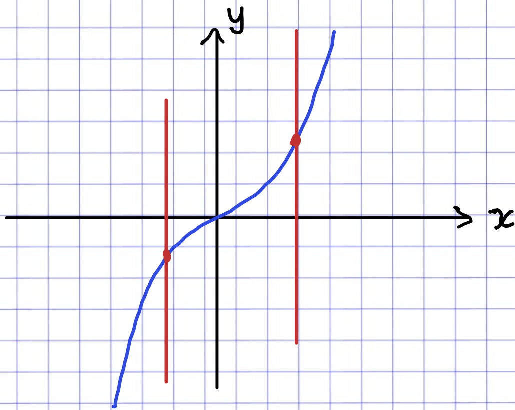




¡Sí!

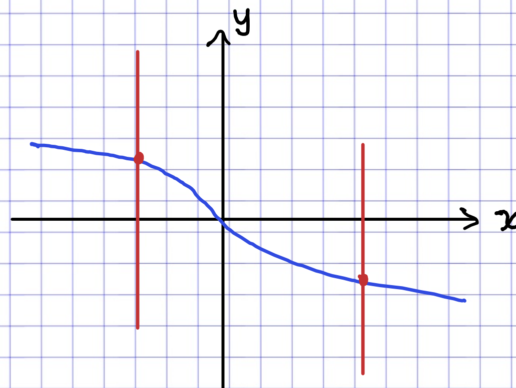
¡No!

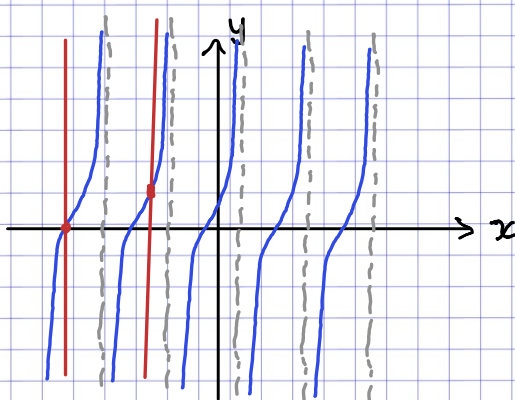




¡Sí!

¡Sí!





¡Sí!

¡No!

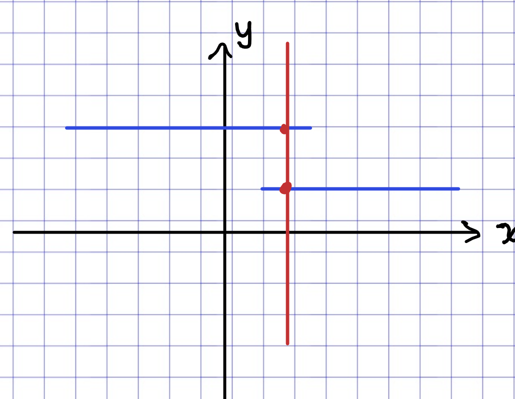


Imagen (Rango)

Recordemos que para una función

$$f : D \subseteq X \longrightarrow Y$$
$$x \longmapsto f(x)$$

su imagen es el conjunto de sus valores funcionales.

$$\boxed{\operatorname{Im}(f) = \{ f(x) \in Y \mid x \in D \}}$$

Para las siguientes funciones, determina el dominio y la imagen:

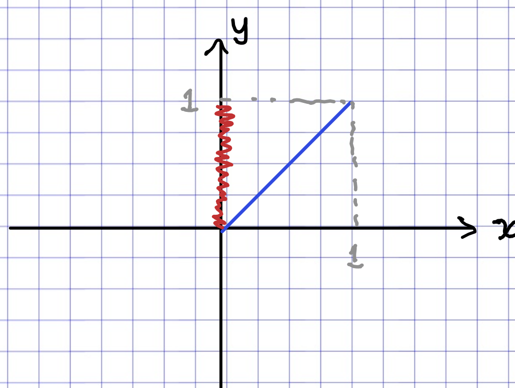
$$f : [0,1] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto x$$

Dominio:

$[0,1]$

Imagen:

$[0,1]$



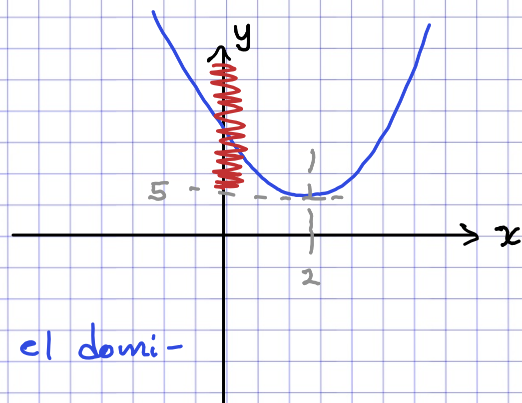
$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto (x-2)^2 + 5$$

Dominio:

$\mathbb{R}$

Imagen:

$[5, \infty)$



Q&A ¿Cuál es el dominio natural de

$$x \mapsto \frac{1}{(x-2)^2+5} \;?$$

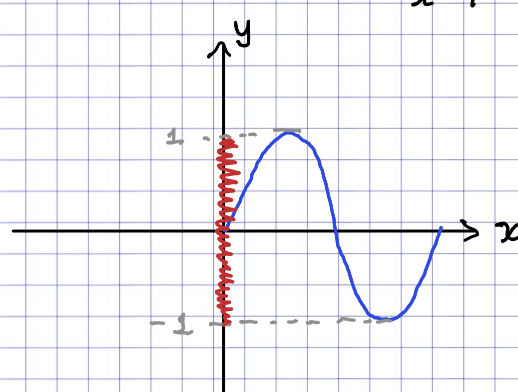
$$f: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \sin(x)$$

Dominio:

$[0, 2\pi]$

Imagen:

$[-1, 1]$



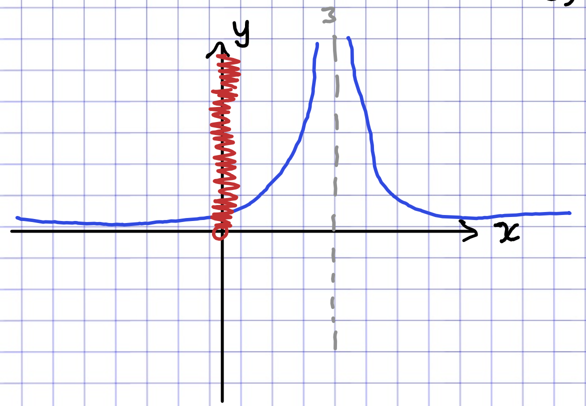
$$f : \mathbb{R}\setminus\{3\} \to \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{1}{(x-3)^2}$$

Dominio:

$\mathbb{R}\setminus\{3\}$

Imagen:

$(0, \infty)$



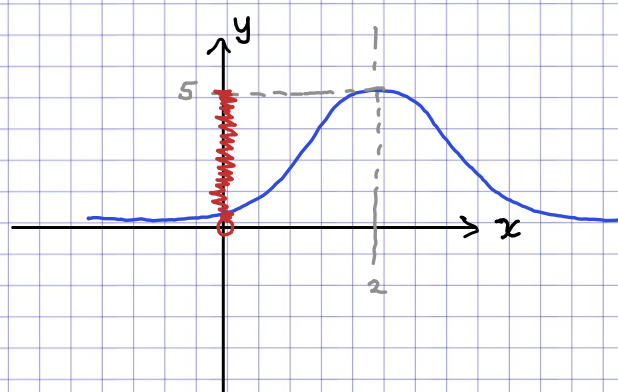
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto 5e^{-(x-2)^2}$$

Dominio:

$\mathbb{R}$

Imagen:

$(0, 5]$



Tipos de funciones

Hemos estudiado los siguientes tipos de funciones:

•) Constantes

Su imagen es un solo punto

•) Sobreyectivas

Toda y en el codominio es de la forma $f(x)=y$ para algún x en el dominio

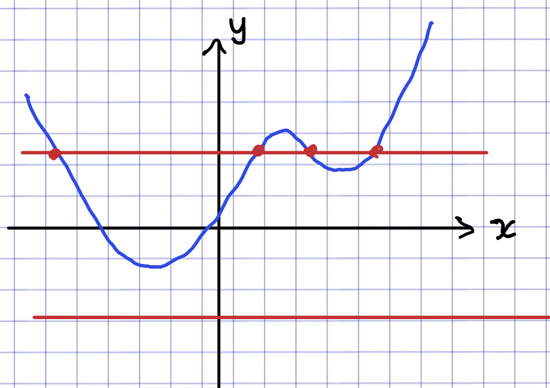
•) Inyectiva

Puntos distintos del dominio tienen distinto valor funcional

•) Biyectiva

Toda y en el codominio es de la forma $f(x)=y$ para una UNICA x en el dominio.

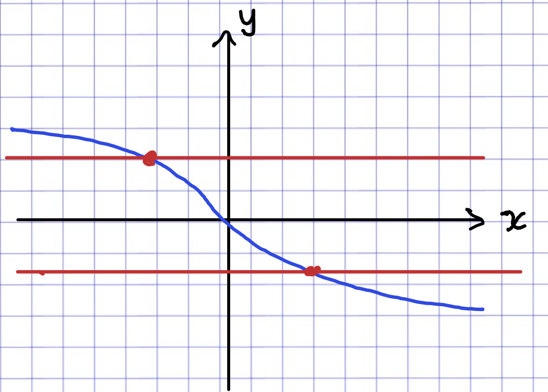
Determina si las siguientes gráficas son inyectivas o sobreyectivas.



NO inyectiva

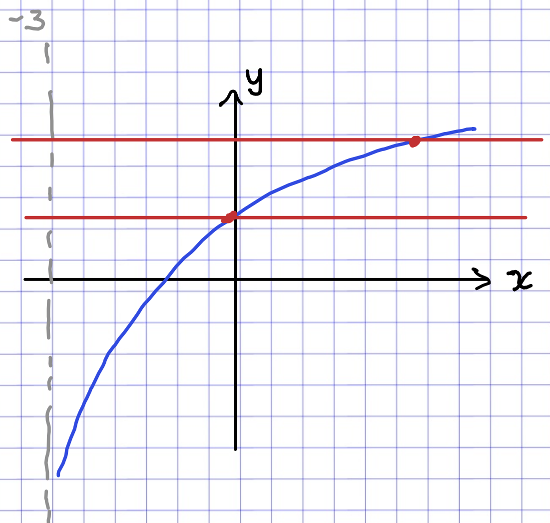
NO sobre

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto -\sqrt[3]{x}$$

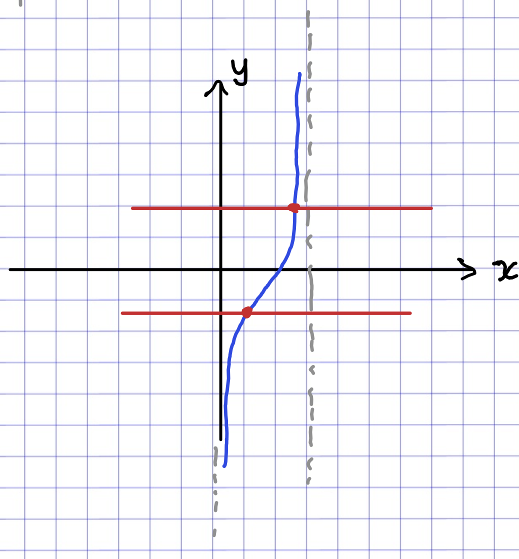


Inyectiva
Sobreyectiva

$$f: (-3, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \ln(x+3)$$



Inyectiva
Sobre



Inyectiva
Sobre

Clase 8 (bis): Consideraciones y ejemplos
Viernes 22, Agosto 2025

En la clase 4, vimos que una función <u>NO</u> solo consiste de una regla de correspondencia. Más aún, para definirla debemos especificar 4 cosas:

$$f : \overbrace{D \subseteq X}^{\substack{\text{(2) El dominio } D \\ \text{(3) El conjunto } X}} \longrightarrow \overbrace{Y}^{\substack{\text{(4) El conjunto} \\ Y \text{ (Contradominio)}}}$$

$$\underbrace{x \longmapsto f(x)}_{\text{(1) La regla de correspondencia}}$$

Para que dos funciones sean iguales deben tener las mismas 4 componentes.

<u>e.g.</u> Considere las funciones

•)
$$f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto x^2$$

•)
$$f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty)$$
$$x \longmapsto x^2$$

•) $g_1 : [0,\infty) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$$x \longmapsto x^2$$

•) $g_2 : [0,\infty) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow [0,\infty)$
$$x \longmapsto x^2$$

•) $h_1 : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$
$$x \longmapsto x^2$$

•) $h_2 : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$
$$x \longmapsto x^2$$

¿Son estas las mismas funciones?
NO, solo tienen la misma regla de correspondencia.

Q&A ¿Cómo son las funciones anteriores? Sobrejectivas? Injectivas? Bijectivas?

Hasta ahora hemos visto funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Las siguientes unidades veremos una versión más general

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$ //

Por ahora, consideremos algunos ejemplos prácticos de funciones.

En la práctica, las funciones suelen usarse para modelar situaciones, es decir, queremos entender el comportamiento de una variable que depende de los valores de otra variable que tiene la libertad de tomar cualquier valor razonable (es independiente)

<u>e.g.</u> Un trabajador puede producir 8 unidades de un producto por hora. Queremos modelar el número de unidades producidas en función del tiempo. La función que logra esto es:

$$
\begin{aligned}
U : [0, \infty) &\longrightarrow [0, \infty) \\
t &\longmapsto U(t) = 8t
\end{aligned}
$$

<u>e.g.</u> Un plomero cobra \$150 la hora y \$50 por acudir al domicilio. Modela esta situación en función del tiempo.

$$
\begin{aligned}
P : [0, \infty) &\longrightarrow [0, \infty) \\
t &\longmapsto 150t + 50
\end{aligned}
$$

e.g. Un banco estima que el tiempo promedio de atención en ventanilla es de 6 min por persona. Para proporcionar un mejor servicio el banco quiere dar el tiempo de espera a los clientes que van llegando. Modela esta situación en función del número de clientes en el banco.

$$E : \mathbb{N} \longrightarrow [0, \infty)$$
$$x \longmapsto 6x$$

Clase 9: Gráficas

Lunes 25, Agosto 2025

Intermezzo Dada una función

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x)$$

se dice que f es par si

$$f(-x) = f(x)$$

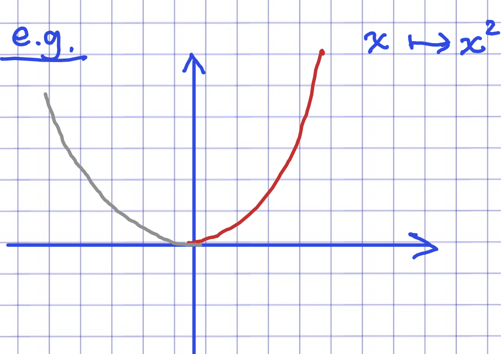
para toda $x \in \mathbb{R}$. Por otro lado, decimos que f es impar si

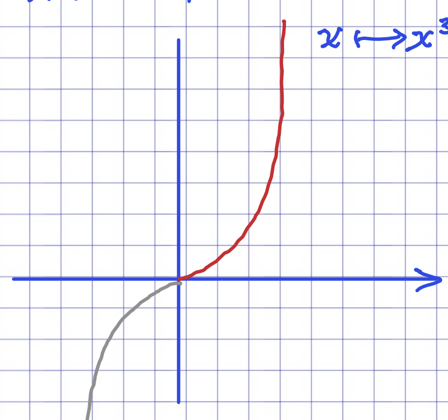
$$f(-x) = -f(x)$$

para toda $x \in \mathbb{R}$.

Este tipo de funciones nos permiten reconstruir "toda la historia" con la "mitad" de la información.

e.g.



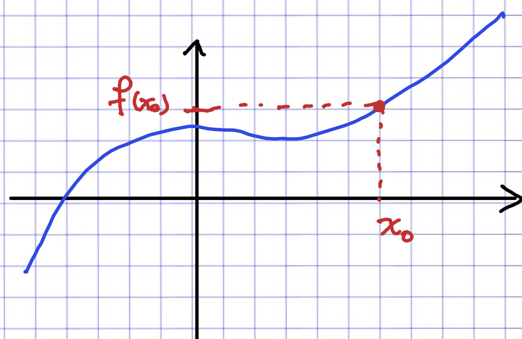


Gráficas

Consideremos una función

$$f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x)$$

Hemos estado considerando figuras asociadas a estas, p. ej.



¿Cómo se llega a esta figura?

Recordemos que la gráfica de una función es una relación (un conjunto de parejas) definida como

$$G(f) := \{ (x, f(x)) \mid x \in D \}$$

Son estas parejas las que dan "vida" a la figura anterior. Para llegar a esto, veamos primero puntos en el plano.

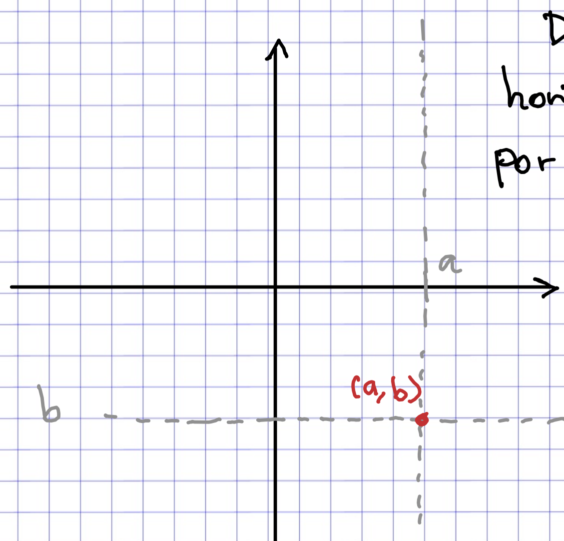
Puntos en el plano

El plano y sus puntos serán para nosotros un primer vistazo al concepto de "vectores"; en particular, vectores en $\mathbb{R}^2$. Dominar esta idea geométrica será de gran utilidad en el futuro.

Consideremos una pareja de números

$$(a, b) \quad \text{con} \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Para obtener su representación en el plano debemos ubicar al número a en el eje horizontal y al número b en el eje vertical:



Dibujando una línea horizontal que pase por b y una vertical que pase por a. El punto de intersección de estas líneas será el punto (a,b)

¿Cómo usamos esto para graficar funciones?

<u>R</u>: Debemos graficar <u>todas</u> las parejas en

$$G(f) := \{ (x, f(x)) \mid x \in D \}$$

Pero (en general) hay una <u>infinidad de parejas</u>. Entonces, grafiquemos solo algunas.

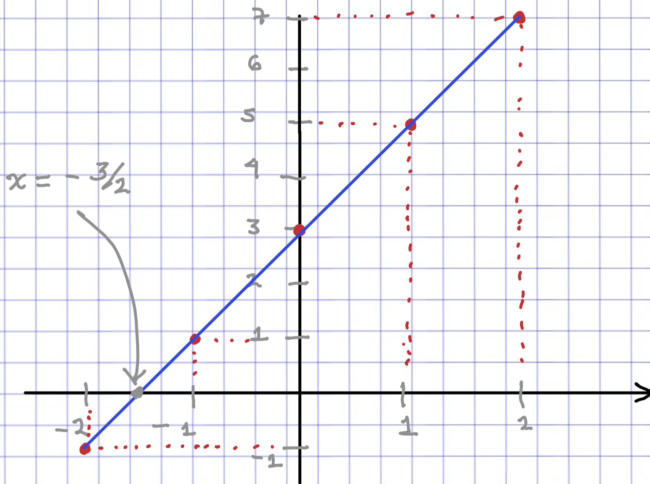
<u>e.g.</u> Consideremos la función asociada a la regla $x \longmapsto 2x+3$

x	$2x+3$
-2	-1
-1	1
0	3
1	5
2	7

Parejas $\rightsquigarrow$

$$(-2,-1)$$
$$(-1, 1)$$
$$(0, 3)$$
$$(1, 5)$$
$$(2, 7)$$

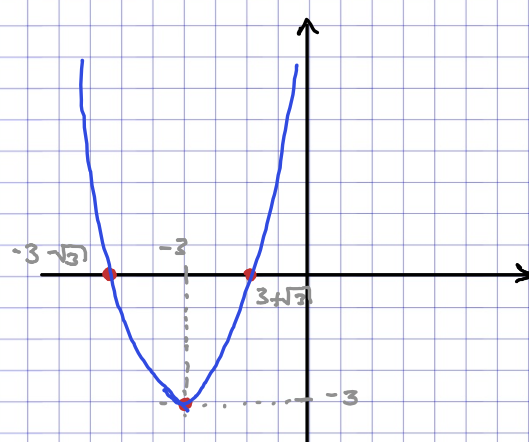
Al graficar estos puntos en el plano obtenemos lo siguiente:



Ej. Calcule el dominio natural de la regla $x \longmapsto \sqrt{2x+3}$ ü

e.g. $x \longmapsto x^2 + x + 6 = (x+3)^2 - 3$

x	$(x+3)^2 - 3$
-3	-3
$-3+\sqrt{3}$	0
$-3-\sqrt{3}$	0



Ej Calcule el dominio natural de la regla $x \longmapsto \sqrt{x^2+6x+6}$ ü

Clase 10: Operaciones con funciones
Martes 26, Agosto 2025

Consideremos dos funciones

$$\begin{aligned} f : D_f \subseteq \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

&

$$\begin{aligned} g : D_g \subseteq \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto g(x) \end{aligned}$$

Uno puede obtener las funciones asociadas a las sig. reglas de correspondencia:

(a) $x \longmapsto f(x) + g(x)$

(b) $x \longmapsto f(x)\,g(x)$

(c) $x \longmapsto \dfrac{1}{f(x)}$

Lo que debemos hacer es calcular sus dominios. Las funciones resultantes

(a') $$\begin{aligned} f+g : D_{f+g} \subseteq \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x)+g(x) \end{aligned}$$

(b') $$\begin{aligned} f\cdot g : D_{f\cdot g} \subseteq \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x)\,g(x) \end{aligned}$$

(c') $\frac{1}{f} : D_{1/f} \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{1}{f(x)}$$

se llaman

(a'') Suma de f & g.

(b'') Producto de f & g.

(c'') Recíproco de f

Q&A ¿Cómo calculamos los dominios de estas operaciones?

•) $x \longmapsto f(x) + g(x)$

x debe poder evaluarse en f & en g, es decir, debe de estar en el dominio de f, D_f, y en el dominio de g, D_g. Por lo tanto,

intersección

$$D_{f+g} = D_f \cap D_g$$

•) $x \longmapsto f(x)\,g(x)$

Como antes, x debe poder evaluarse en f & en g. Por lo tanto,

$$D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g$$

•) $x \longmapsto \frac{1}{f(x)}$

x debe poder evaluarse en f & no podemos tomar valores de x tales que $f(x)=0$. Por lo tanto,

$$D_{\frac{1}{f}} = D_f \setminus \{x \mid f(x)=0\}$$

<u>e.g.</u> Consideren la función

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto (x+3)^2-3 \end{aligned}$$

¿Cual es el dominio de $\frac{1}{f}$?

<u>Sol</u> La regla de correspondencia de $1/f$ es $x \longmapsto \frac{1}{(x+3)^2-3}$. Por lo tanto, debemos asegurar que el denominador no sea cero, es decir, $x \neq -3+\sqrt{3}$ $x \neq -3-\sqrt{3}$:

$$\begin{aligned} D_{1/f} &= \mathbb{R} \setminus \{-3+\sqrt{3}, -3-\sqrt{3}\} \\ &= D_f \setminus \{x \mid (x+3)^2-3=0\} \end{aligned}$$

<u>e.g.</u> Consideren la función

$$\begin{aligned} f : [0,\infty) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto (x+3)^2-3 \end{aligned}$$

¿Cuál es el dominio de $1/f$?

Sol

$$D_{1/f} = D_f \setminus \{x \mid (x+3)^2 - 3 = 0\}$$

$$= [0,\infty) \setminus \{\underbrace{-3-\sqrt{3},\ -3+\sqrt{3}}_{\text{Son negativos}}\}$$

$$= [0,\infty)$$

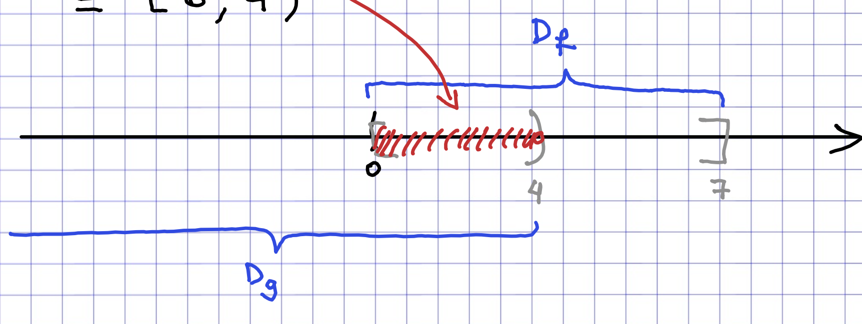
e.g. Consideren las funciones

$$f : [0,7] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto 2x+6$$

& $$g : (-\infty, 4) \longmapsto \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{1}{x-4}$$

¿Cuál es el dominio de $f+g$?

$$D_{f+g} = D_f \cap D_g$$
$$= [0,7] \cap (-\infty,4)$$
$$= [0,4)$$



__e.g.__ Consideren las funciones

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto (x+3)^2 - 3$$

&

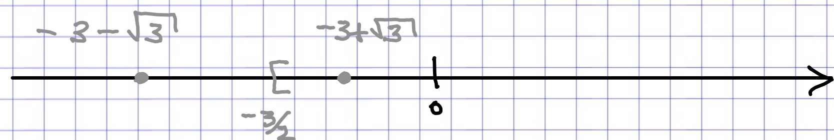
$$g : [-3/2, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \sqrt{2x+3}$$

¿Cuál es el dominio de g/f?

__Sol__ Observa que $\dfrac{g(x)}{f(x)} = g(x)\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)$

entonces el dominio de g/f es igual al dominio de $g \cdot \left(\frac{1}{f}\right)$.

$$D_{g/f} = D_g \cap D_{1/f}$$
$$= [-3/2, \infty) \cap (\mathbb{R} \setminus \{-3+\sqrt{3}, -3-\sqrt{3}\})$$
$$= [-3/2, \infty) \setminus \{-3+\sqrt{3}\}$$



Importante: El contenido de esta clase __NO__ es examinable.

Clase 11: Funciones lineales y cuadráticas I

Miércoles 27, Agosto 2025

Funciones lineales

La forma general de una "función lineal" en una variable es

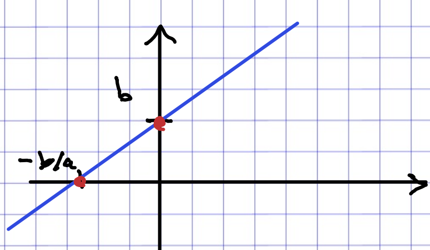
$$x \longmapsto a x + b \quad ; \quad a \neq 0$$

El valor de a nos dice el tamaño de paso en el eje vertical por cada unidad de cambio en el eje horizontal. Mientras que el valor de b nos dice el "punto de intersección" de la función con el eje vertical.

Para bosquejar una "función" como

$$x \longmapsto ax+b \quad ; \quad a \neq 0$$

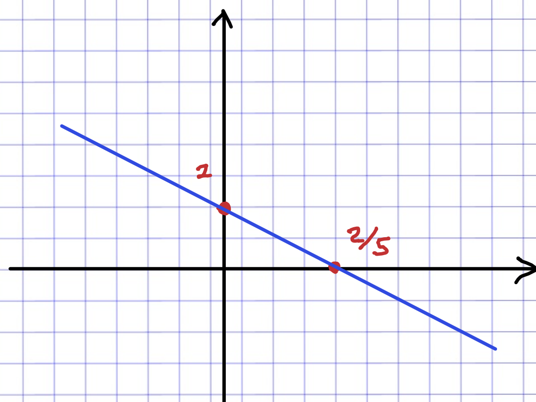
los puntos de x más importantes son $x=0$ & $x=-b/a$.



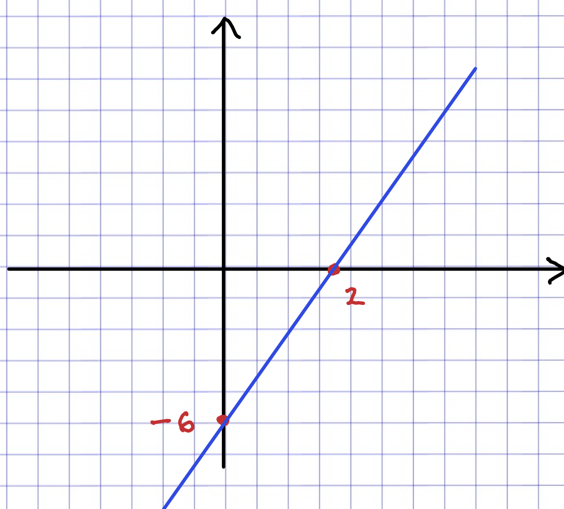
El primero nos dice dónde la línea intersecta al eje vertical, y el segundo al horizontal.

e.g Bosqueja las funciones naturales asociadas a la sig. reglas:

- $x \longmapsto -5x+2$



- $x \longmapsto 3x-6$



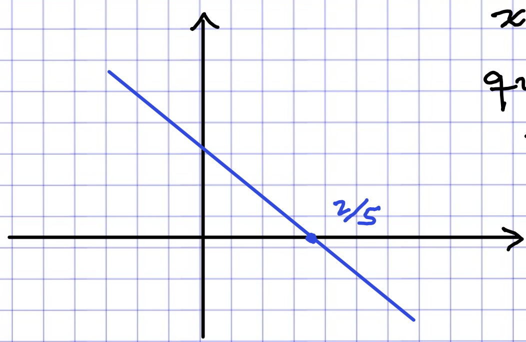
Ej Encuentra la función natural asociada a las sig. reglas:

(a) $x \longmapsto \sqrt{-5x+2}$

(b) $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{-5x+2}}$

(c) $x \longmapsto \sqrt{-5x+2}$

Sol Resolvamos (b). Del bosquejo de $x \longmapsto -5x+2$ sabemos que $-5x+2 > 0$ cuando $x \in (-\infty, 2/5)$.



Por lo tanto, la función natural asociada es

$$f : (-\infty, 2/5) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{-5x+2}}$$

Funciones cuadráticas

A diferencia de las funciones lineales, uno puede expresar funciones cuadráticas de distintas formas. Para bosquejarlas es conveniente usar la sig. representación:

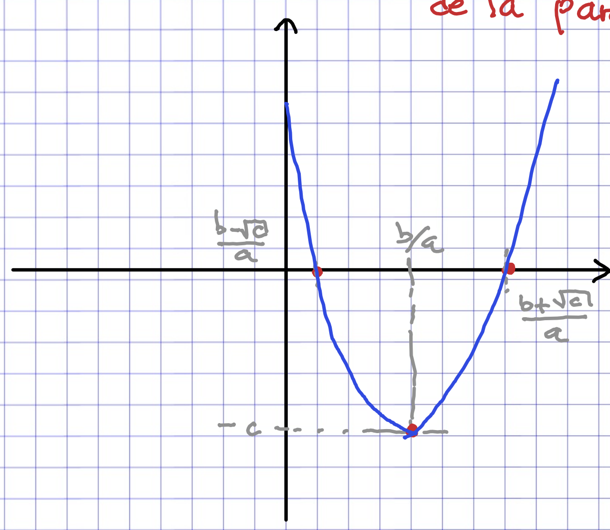
$$x \longmapsto \pm(ax-b)^2 + c \quad ; \quad a \neq 0 \text{ ,}$$

y los puntos clave son:

$$x = \frac{b}{a} \text{ ,} \quad (\text{cuando } ax-b=0)$$

& $$x_{1,2} = \frac{b \pm \sqrt{\pm c}}{a} \quad ; \quad \pm c \geq 0$$

(Las raices o ceros de la parabola; si existen)



Q&A ¿Qué pasa cuando a incrementa? ¿y cuando decrece? ¿Y si nos preguntamos lo mismo sobre b & c?

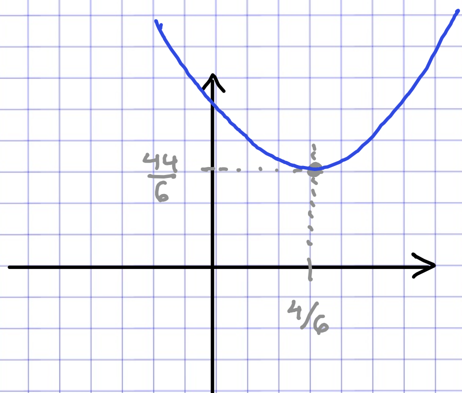
e.g. Bosqueja las gráficas de las funciones naturales asociadas a las sig. reglas:

•) $x \longmapsto 6x^2 - 8x + 10$

Sol Reescribimos $6x^2 - 8x + 10$ en la forma $\pm(ax-b)^2 - c$:

$$\frac{16}{6} + \frac{44}{6} = 10$$

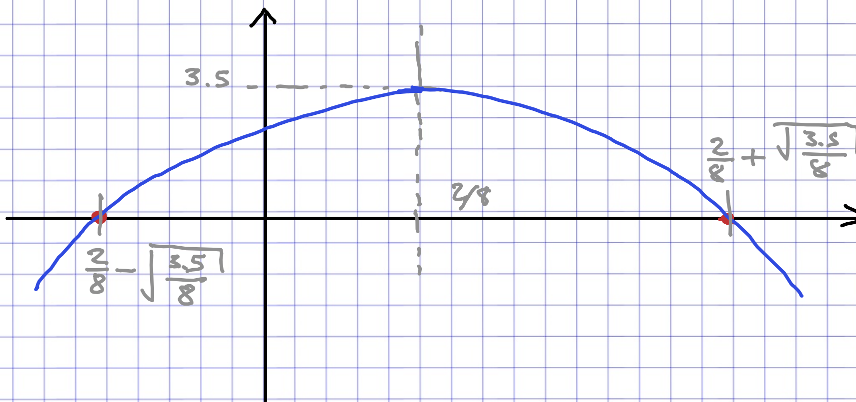
$$\left(\sqrt{6}\,x - \frac{4}{\sqrt{6}}\right)^2 + \frac{44}{6}$$



•) $x \longmapsto -8x^2 + 4x + 3$

Sol Observen que

$$-8x^2 + 4x + 3 = -(8x^2 - 4x - 3)$$
$$= -\left[\left(\sqrt{8}\,x - \frac{2}{\sqrt{8}}\right)^2 - 3.5\right]$$
$$= -\left(\sqrt{8}\,x - \frac{2}{\sqrt{8}}\right)^2 + 3.5$$



Ej Encuentra la función natural asociada a la regla de correspondencia $x \longmapsto \sqrt{-8x^2+4x+3}$

Clase 12 : Funciones cuadráticas II
Jueves 28, Agosto 2025

Como ayuda para entender el proceso para escribir una función cuadrática en su forma "para graficar" consideramos lo siguiente.

Sean $a > 0$ & $b, c \in \mathbb{R}$. Entonces hay dos casos:

<u>Caso 1</u> (Apertura hacia arriba)

$$+ax^2 + bx + c = \left(\sqrt{a}\,x + \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$$

<u>Caso 2</u> (Apertura hacia abajo)

$$\begin{aligned} -ax^2 + bx + c &= -\left[ax^2 - bx - c\right] \\ &= -\left[\left(\sqrt{a}\,x - \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2 - c - \frac{b^2}{4a}\right] \\ &= -\left(\sqrt{a}\,x - \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2 + c + \frac{b^2}{4a} \end{aligned}$$

Estas "fórmulas" deben ser usadas para comprender el método mencionado y no se recomienda memorizarlas.

Veamos algunos ejemplos:

e.g. Consideremos la siguiente función:

$$x \longmapsto \sqrt{5x^2+7x+9}$$

¿Cuál es su dominio natural?

Sol Para que $\sqrt{5x^2+7x+9}$ sea un número real necesitamos que

$$5x^2+7x+9 \geq 0$$

Resolver este tipo de desigualdades con argumentos puramente algebraicos puede llegar a ser "complicado". Y el uso de otro tipo de argumentos requieren de conocimientos que salen del objetivo del curso.

El método que nosotros usaremos será mediante el bosquejo de gráficas y su interpretación. Por lo tanto, nos desviaremos para graficar $x \longmapsto 5x^2+7x+9$.

Desviación Hay que graficar

$$x \longmapsto 5x^2+7x+9$$

para ello escribimos la expresión en su

forma para graficar:

$$5x^2+7x+9 = \left(\sqrt{5}\,x + \frac{7}{2\sqrt{5}}\right)^2 + \frac{131}{20}$$

Los puntos clave para bosquejar esta gráfica son los que se obtienen al resolver

•) $\sqrt{5}\,x + \frac{7}{2\sqrt{5}} = 0$

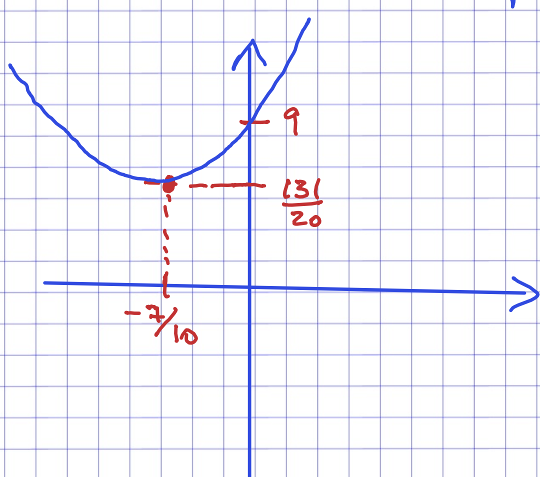
•) $5x^2+7x+9 = 0$

para la variable x, esto es, cuando

•) $x = -\frac{7}{10}$

•) $5x^2+7x+9$ no tiene raices reales

Por lo tanto, el bosquejo es



x	$5x^2+7x+9$
$-7/10$	$\frac{131}{20}$
0	9

Regresamos a nuestro problema original. De la gráfica podemos ver que

$$5x^2+7x+9 \geq 0$$

para cualquier $x \in \mathbb{R}$. Así que,

$$\sqrt{5x^2+7x+9}$$

siempre está bien definida. Por lo tanto, la funcion natural asociada es:

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sqrt{5x^2+7x+9} \end{aligned}$$

e.g. Considera

$$x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{-5x^2-3x+2}}$$

¿Cuál es su dominio natural?

Sol Similar al ejemplo anterior, necesitamos que

- $-5x^2-3x+2 \geq 0$
- $\sqrt{-5x^2-3x+2} \neq 0$

Para saber los valores de x que satisfacen estas restricciones, bosquejemos la función $-5x^2-3x+2$. Observa que

$$-5x^2-3x+2 = -\left(\sqrt{5}\,x+\frac{3}{2\sqrt{5}}\right)^2+\frac{49}{20}$$

Encontramos los valores de x que satisfacen lo sig:

•) $\sqrt{5}\,x+\frac{3}{2\sqrt{5}}=0$

•) $-5x^2-3x+2=0$

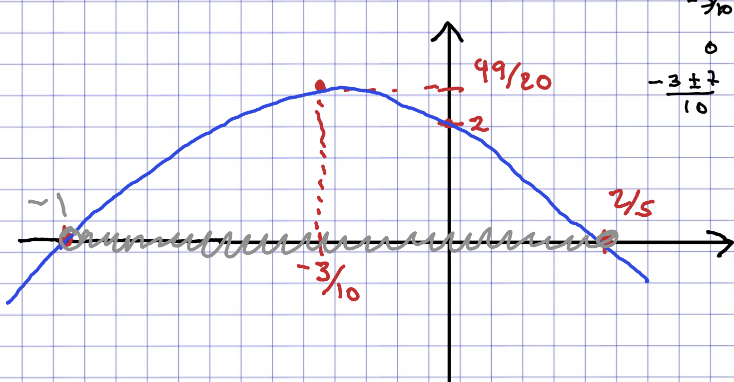
Esto ocurre cuando:

•) $x=\frac{-3}{10}$

•) $x_{1,2}=\frac{-3\pm7}{10}$

Y el bosquejo de la función es el siguiente:

x	$-5x^2-3x+2$
$-3/10$	$49/20$
0	2
$\frac{-3\pm7}{10}$	0



Por lo tanto, la función deseada es

$$f : (-1, 2/5) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{-5x^2-3x+2}} \qquad //$$

La intención de este tipo de ejercicios es practicar el bosquejo de gráficas y su interpretación.

Clase 13: Semicírculos

Viernes 29, Agosto 2025

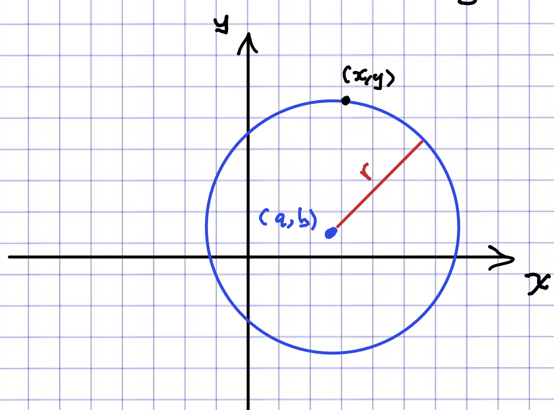
En esta clase aprenderemos a bosquejar semicírculos:

Semicírculo

La ecuación general de un círculo es la siguiente:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \qquad (*)$$

Esta relación genera un círculo con centro en (a,b) y radio $r > 0$.



Cualquier punto (x,y) sobre la línea azul satisface la ecuación.

Al intentar resolver $(*)$ para y obtenemos lo siguiente:

(0) $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

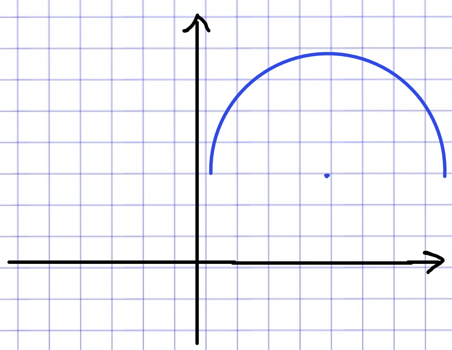
(1) $(y-b)^2 = r^2 - (x-a)^2$

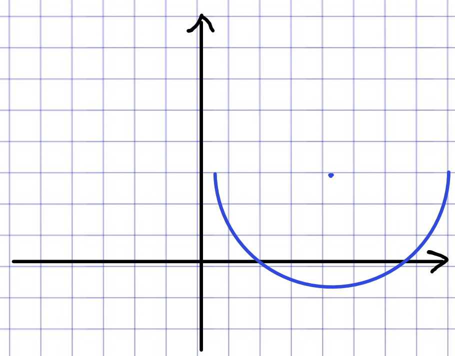
(2) $y - b = \pm\sqrt{r^2 - (x-a)^2}$

(3) $y = b \pm \sqrt{+r^2 - (x-a)^2}$

Considerando estas como reglas de correspondencia:

$x \longmapsto b + \sqrt{r^2 - (x-a)^2}$ $\qquad$ $x \longmapsto b - \sqrt{r^2-(x-a)^2}$

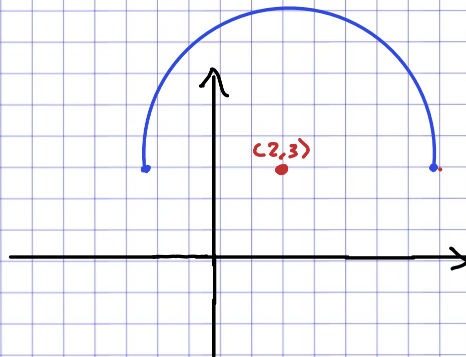




e.g. Bosqueja la gráfica de

$$x \longmapsto 3 + \sqrt{25 - (x-2)^2}$$

Sol Dado que el signo que acompaña a la raíz es positivo, tenemos un semicírculo superior con centro en $(2,3)$ y radio $\sqrt{25} = 5$.



e.g. Bosqueja la gráfica de

$$x \longmapsto -5 - \sqrt{-x^2 + 8x - 10}$$

Sol Primero veamos si es posible llevarlo a la representación deseada:

$$\begin{aligned} -x^2 + 8x - 10 &= -(x^2 - 8x + 10) \\ &= -[(x-4)^2 - 6] \\ &= 6 - (x-4)^2 \end{aligned}$$

Así que:

$$\begin{aligned} x \longmapsto -5 - \sqrt{-x^2 + 8x - 10} \\ = -5 - \sqrt{6 - (x-4)^2} \end{aligned}$$

Esta es la regla de un semicírculo inferior con radio $\sqrt{6}$ y centro $(4, -5)$.

<u>e.g.</u> (Contraejemplo) Bosqueja la gráfica de

$$x \longmapsto -4 + \sqrt{-x^2+6x-14}$$

<u>Sol</u> Primero veamos si es posible llevarlo a la representación deseada:

$$\begin{aligned} -x^3-6x-14 &= -(x^2-6x+14) \\ &= -[(x-3)^2+5] \\ &= -5-(x-3)^2 \end{aligned}$$

Dado que el radio al cuadrado siempre tiene signo positivo, esta <u>NO</u> es la gráfica de un semicírculo.

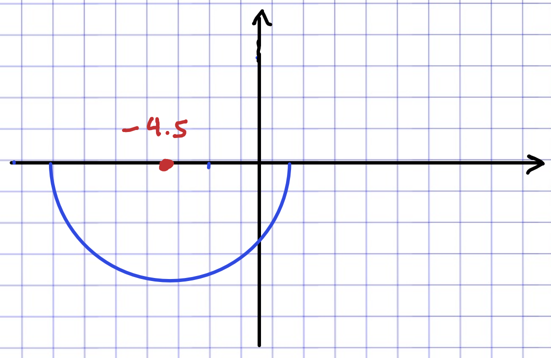
<u>e.g.</u> Bosqueja la gráfica de

$$x \longmapsto -\sqrt{-x^2-9x+7}$$

<u>Sol</u> Primero veamos si es posible llevarlo a la representación deseada:

$$\begin{aligned} -x^2-9x+7 &= -(x^2+9x-7) \\ &= -\left[(x+9/2)^2 - \frac{119}{4}\right] \\ &= \frac{119}{4} - (x+9/2)^2 \end{aligned}$$

Por lo tanto, es la regla de un semicírculo inferior con radio $\sqrt{\frac{119}{4}} = 5.22$ y centro $(-9/2, 0)$.



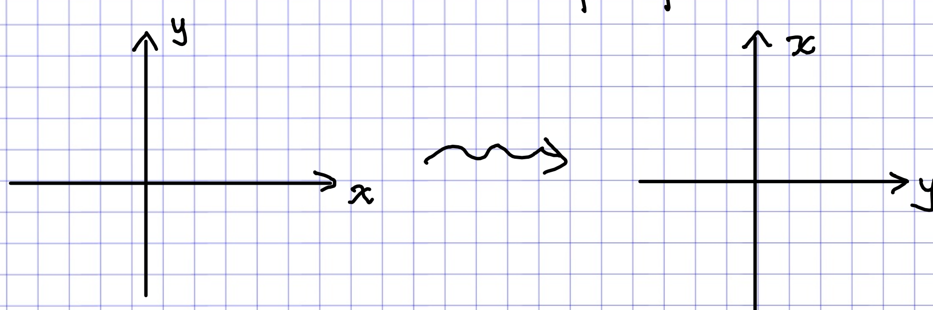
Clase 14: Raiz cuadrada

Lunes 1, Septiembre 2025

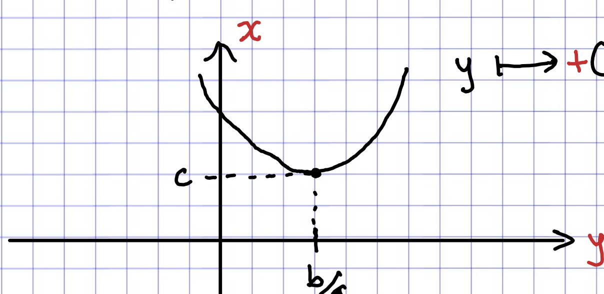
Sea $a>0$, & $b,c \in \mathbb{R}$. Consideren la siguientes relaciones:

$$\pm(ay-b)^2+c = x \qquad (*)$$

donde (x,y) son parejas de números reales. para graficar esta relación basta con hacer un cambio de perspectiva:

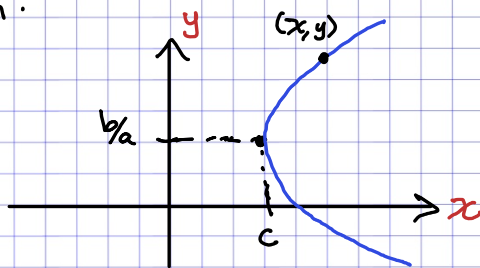


tomando a x como la variable dependiente & a y como la independiente. Hecho esto usamos lo aprendido la semana pasada:



$y \longmapsto +(ay+b)^2+c$

Este NO es un proceso práctico. Además, al regresar a considerar a x como la variable independiente NO obtenemos una función:



$$(ay-b)^2+c=x$$

Obs Recuerda que todos los puntos (x,y) sobre la línea azul satisfacen la ecuación

$$x=(ay-b)^2+c$$

Similar al caso del círculo, podemos resolver la ecuación (*) para y & obtener dos reglas de correspondencia:

(0) $(ay-b)^2+c=x$

(1) $(ay-b)^2=x-c$

(2) $ay-b=\pm\sqrt{x-c}$

(3) $ay=b\pm\sqrt{x-c}$

(4) $y=\dfrac{b\pm\sqrt{x-c}}{a}$

Es decir, obtenemos las reglas:

$$x \longmapsto \frac{b + \sqrt{x-c}}{a} \qquad (**)$$

& $$x \longmapsto \frac{b - \sqrt{x-c}}{a}$$

Q&A ¿Cuál es el dominio natural de estas reglas de correspondencia?

Requerimos que $x - c \geq 0$, es decir, que $x \geq c$

Ej Verifica que si consideras

$$-(ay-b)^2 + c = x$$

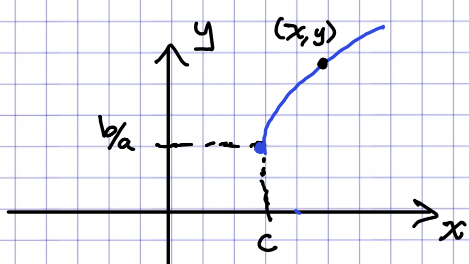
& resuelves para y obtienes que

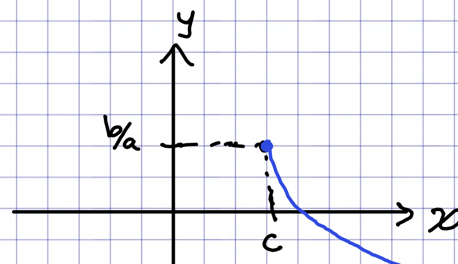
$$y = \frac{b \pm \sqrt{c-x}}{a}$$

Q&A ¿Cuál es el dominio en este caso?

De vuelta al caso $+(ay-b)^2 + c = x$

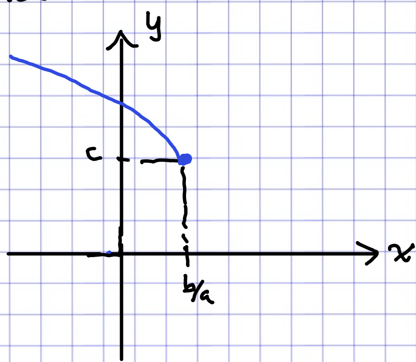
Las gráficas de las reglas $(**)$ son

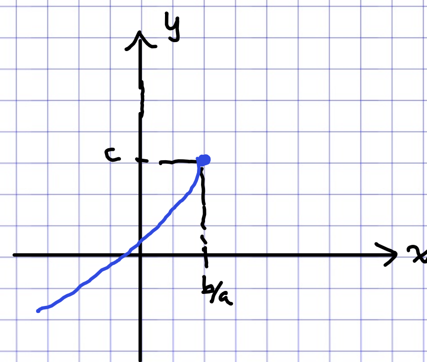




$$x \longmapsto \frac{b + \sqrt{x-c}}{a} \qquad\qquad x \longmapsto \frac{b - \sqrt{x-c}}{a}$$

En el caso $-(ay-b)^2+c=x$, obtenemos:





$$x \longmapsto \frac{b+\sqrt{c-x}}{a} \qquad\qquad x \longmapsto \frac{b-\sqrt{c-x}}{a}$$

Para un bosquejo de estas funciones los puntos "importantes" son

- •) cuando $x-c=0$
- •) Cuando $x=0$ (si es posible)
- •) Cuando $\frac{b-\sqrt{x-c}}{a}=0$ (si es posible)

& debemos considerar lo siguiente:

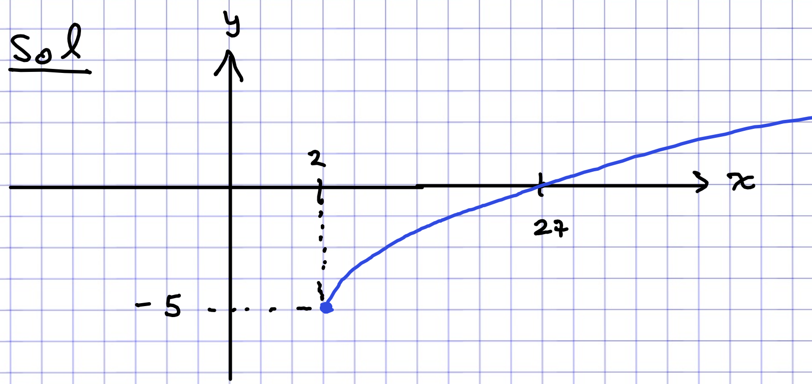
- •) El signo que acompaña a la raiz cuadrada.
- •) El signo que acompaña a la x.

Veamos algunos ejemplos:

e.g. Bosqueja la gráfica de

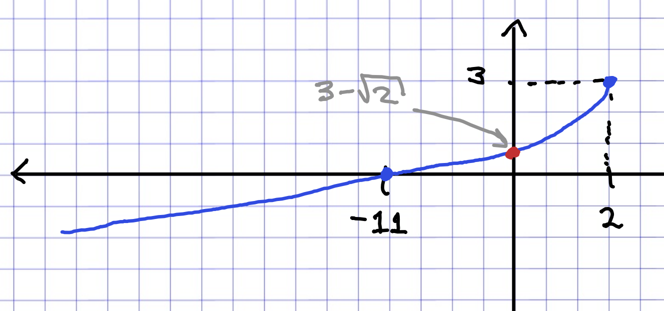
$$x \longmapsto -5 + \sqrt{x-2}$$

Sol



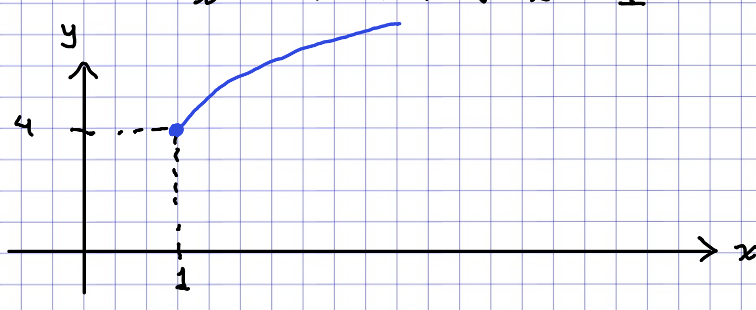
e.g. Bosqueja la gráfica de

$$x \longmapsto 3 - \sqrt{2-x}$$



e.g. Bosqueja la gráfica de

$$x \longmapsto 4 + \sqrt{x-1}$$



Clase 15: Traslación & escalamiento

Martes 2, Septiembre 2025

Hasta ahora hemos estudiado el bosquejo de la siguientes funciones:

- •) Funciones lineales
- •) Funciones cuadráticas
- •) Semicirculos
- •) Raíces cuadradas

En esta clase veremos algunas transfomaciones importantes:

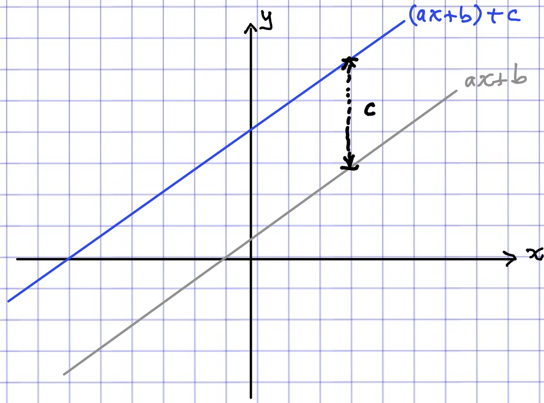
- •) Traslaciones
- •) Escalamientos

Las cuales modifican "un poco" las funciones resultantes & para bosquejarlas podemos apoyanos de las originales.

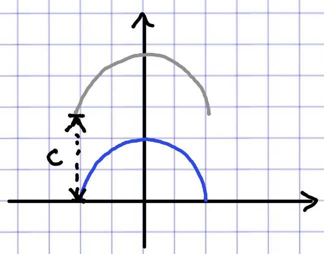
Traslaciones verticales

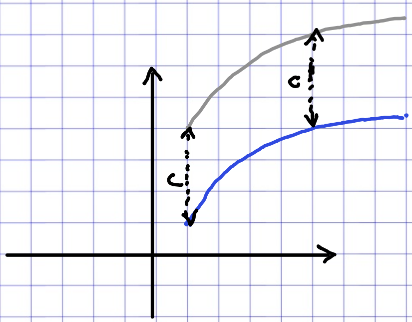
Estas transformaciones ocurren al sumarle a la función una constante

$$x \mapsto f(x) \xrightarrow[\text{vertical}]{\text{Traslación}} x \mapsto f(x)+c$$



Esta transformación "sube" la gráfica si $c>0$ & "baja" la gráfica si $c<0$.

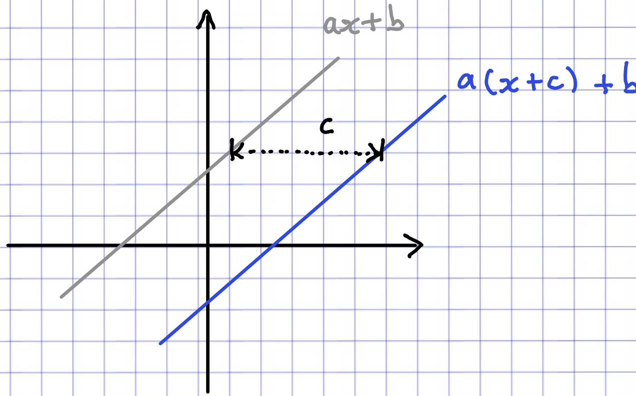




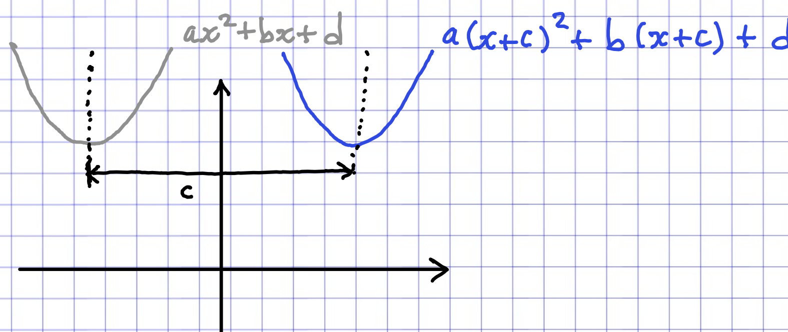
Traslaciones horizontales

Estas transformaciones ocurren cuando antes de "pasar" x a la función le restamos una constante.

$$x \longmapsto f(x) \overset{\text{Traslación horizontal}}{\rightsquigarrow} x \longmapsto f(x-c)$$



Esta transfomación "desplaza" la función a la derecha si $c > 0$ & a la izquierda si $c < 0$.



Escalamientos

Las transfomaciones por escalamiento se comportan distinto para cada función, pero podrían describise como aquellas que "estrechan" o "estiran" las funciones

$$x \mapsto f(x) \ \underset{\text{Escalamientos}}{\rightsquigarrow} \ x \mapsto c \cdot f(x)$$

Hay dos puntos importantes a resaltar:

- Estas transformaciones mantienen los "ceros" de las funciones
- Si $c>0$, la función resultante se mantiene del "mismo lado". respecto al eje horizontal.
- Si $c<0$, la función "cambia de lado" respecto al eje horizontal.

Ejemplos en pantalla

Graficar en GeoGebra

- $ax+b$
- ax^2+bx+d
- $b \pm \sqrt{r^2-(x-a)^2}$
- $\dfrac{b \pm \sqrt{x-c}}{a}$
- $\dfrac{b \pm \sqrt{c-x}}{a}$

Clase 16: Funciones polinomiales y por intervalos

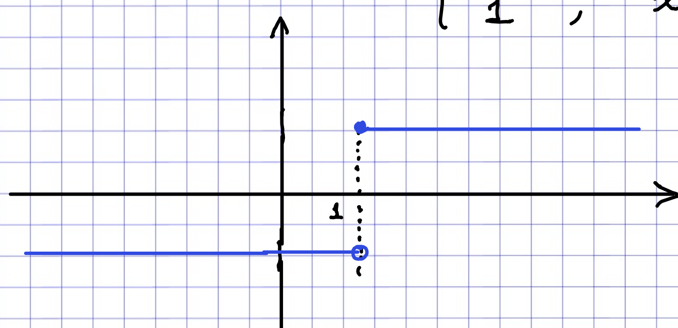
Miércoles 3, Septiembre 2025

Funciones por intervalos

Una función por intervalos (y en general por partes) es aquellas que tienen distintas reglas de correspondencia definidas por intervalos.

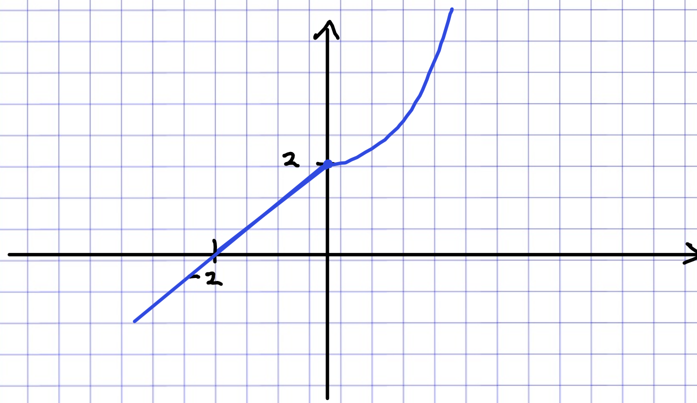
e.g.

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \begin{cases} -1 & , \quad x \in (-\infty, 1) \\ 1 & , \quad x \in [1, \infty) \end{cases}$$



e.g.

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \begin{cases} x+2 & , \quad x \in (-\infty, 0) \\ x^2+2 & , \quad x \in (0, \infty) \end{cases}$$



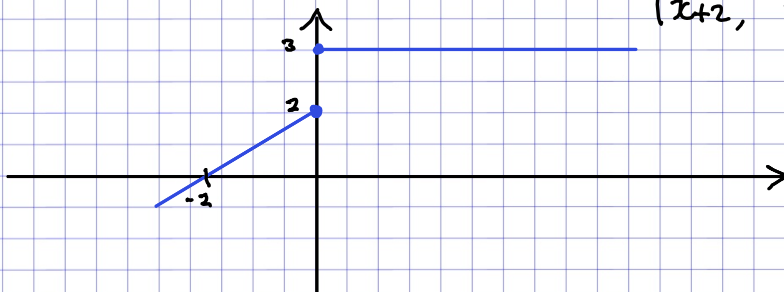
Si quisieramos graficar este tipo de funciones, bosquejamos la funciones individuales y luego nos restringimos a los intervalos mencionados.

<u>Obs</u> El número de "partes" de la función no tiene limite.

<u>Obs</u> Debemos tener cuidado que no mandemos un mismo punto del dominio a distintos del contradominio.

<u>e.g.</u> (Contraejemplo)

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \begin{cases} 3, & x \in [0, \infty) \\ x+2, & x (-\infty, 0] \end{cases}$$



Funciones polinomiales

Una función polinomial (de una variable) es aquella de la forma

$$P : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 ,$$

donde $a_n, \dots, a_0 \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$ & $n \in \mathbb{N}_0$

La forma corta de escribir lo anterior es con la siguiente notación:

$$a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$$

Def (Grado de un polinomio) Para un polinomio

$$a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$$

con $a_n \neq 0$, el grado de P es $n \in \mathbb{N}_0$.

e.g. Las funciones cuadráticas son polinomios de segundo grado (o grado 2).

Def (Ceros) Dada una función

$$f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x)$$

los ceros de f son los puntos x en el dominio de f tales que

$$f(x) = 0.$$

Ceros (raices) de funciones cuadráticas

Sea $a \geq 0$ & $b, c \in \mathbb{R}$. Consideren la función

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto ax^2 + bx + c \end{aligned}$$

Recuerden que

$$ax^2 + bx + c = \left(\sqrt{a}\,x + \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$$

Para encontrar los ceros de esta función resolvemos lo siguiente:

(0) $$\left(\sqrt{a}\,x + \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} = 0$$

(1) $$\left(\sqrt{a}\,x + \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

(2) $$\sqrt{a}\,x + \frac{b}{2\sqrt{a}} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2\sqrt{a}}$$

(3) $$\sqrt{a}\,x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2\sqrt{a}}$$

(4) $$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

De esta forma obtenemos los ceros de la función f.

<u>Obs</u> Uno puede hacer lo mismo cuando tenemos

$$ax^2 + bx + c$$

con $a \leq 0$. Basta considerar $a = -\hat{a}$ para $\hat{a} \geq 0$.

<u>Obs</u> Las funciones polinomiales de grado 3 tambien tienen una "forma cerrada" para sus ceros, pero es más complicada.

<u>Obs</u> Las funciones polinomiales de grado n tienen a lo más n raices reales & exactamente n raices complejas.

<u>Obs</u> Las funciones polinomiales de grado impar tienen siempre al menos una raiz real y las de grado par pueden no tener ninguna raiz real.

Clase 17: Funciones algebraicas y racionales

Jueves 4, Septiembre 2025

Funciones algebraicas

Sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función "continua"
$$x \longmapsto f(x)$$

Decimos que f es una función algebraica si existen $n \in \mathbb{N}$ & polinomios $a_n(x), \ldots, a_0(x)$ con coeficientes enteros tales que

$$a_n(x) f(x)^n + \cdots + a_1(x) f(x) + a_0(x) = 0$$

e.g. La función
$$f : x \longmapsto \sqrt{1-x^2}$$

satisface que

$$\underbrace{1}_{a_2(x)} f(x)^2 + \underbrace{0}_{a_1(x)} f(x) + \underbrace{x^2 - 1}_{a_0(x)} = 0,$$

es decir,

$$(\sqrt{1-x^2})^2 + x^2 - 1 = 0$$

Importante: Funciones algebraicas no serán examinables.

Funciones racionales

Una función racional es aquella de la forma

$$x \longmapsto f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

donde P & Q son polinomios.

e.g. •) $x \longmapsto \dfrac{x+2}{x^2}$ $\quad P(x) = x+2$, $Q(x) = x^2$

•) $x \longmapsto \dfrac{x^3+x^2}{x-2}$ $\quad P(x) = x^3+x^2$, $Q(x) = x-2$

Para graficar este tipo de expresiones se puede hacer lo siguiente:

•) Encontrar los puntos de indeterminación, es decir, los valores de x donde $Q(x) = 0$.

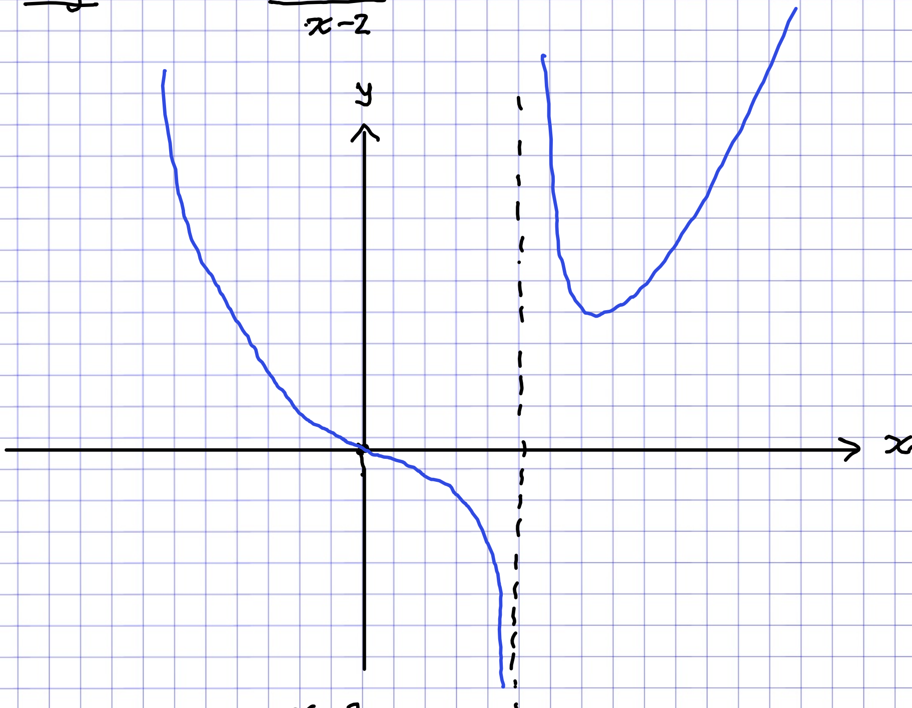
•) Determinar el polinomio de mayor grado entre P & Q.

•) El comportamiento en el infinito de $\frac{P(x)}{Q(x)}$ será similar a $\frac{a_n^P}{a_m^Q} x^{n-m}$

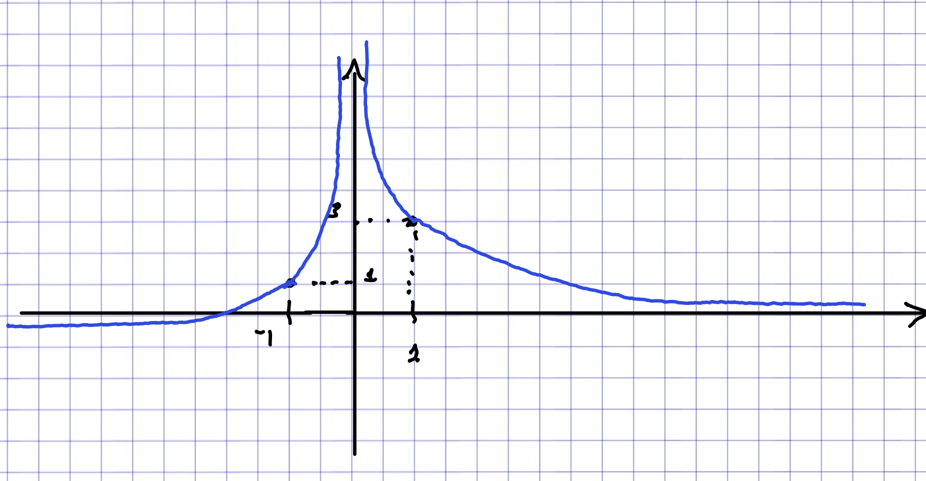
•) Para el comportamiento cerca de los

puntos de indeterminación debemos analizar los signos & tomar puntos de referencia.

e.g. $x \mapsto \dfrac{x^3+x^2}{x-2}$



e.g. $x \mapsto \dfrac{x+2}{x^2}$

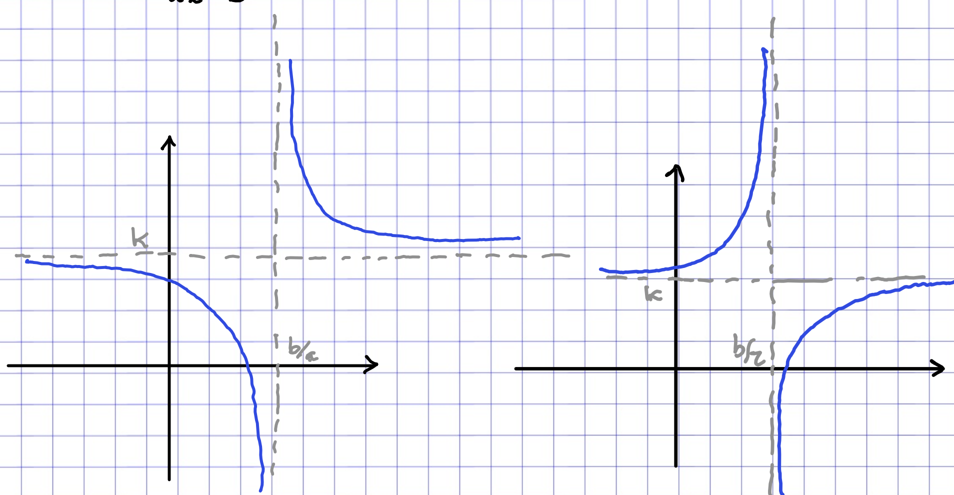


Casos notables

(1) $x \longmapsto \dfrac{1}{ax-b} + k \qquad a \neq 0$

En este caso, el punto de indeterminación es en b/a & la constante k determina el valor hacia donde la función se aproxima en el infinito

$x \longmapsto \dfrac{1}{ax-b} + k$



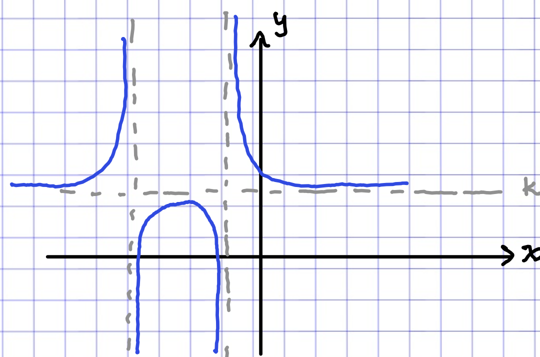
$a>0 \qquad\qquad a<0$

(2) $x \longmapsto \dfrac{1}{\pm(ax-b)^2+c} + k$ (Este inciso no es examinable)

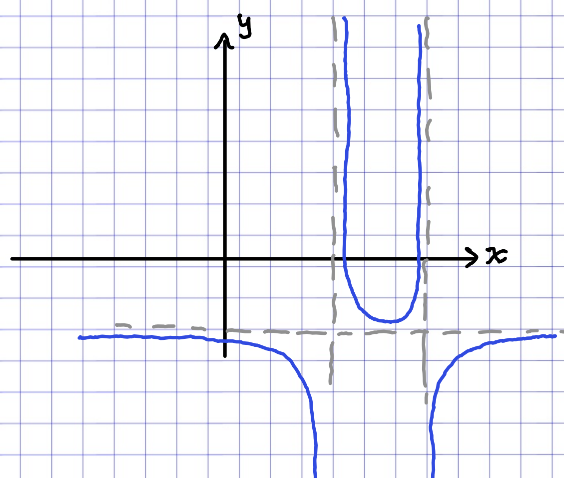
En este caso, los puntos de indeterminación, si existen ocurren en los ceros del denominador & la constante k también determina el valor hacia donde la función se aproxima en el infinito.

Hay 4 casos:

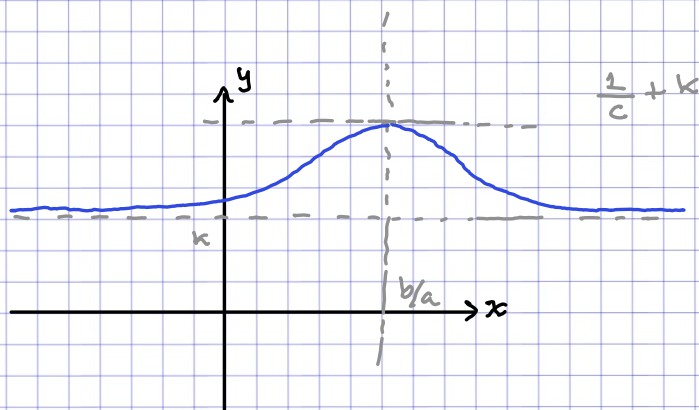
Caso 1 Tenemos $+(ax-b)^2+c$ (signo positivo) & la función tiene indeterminaciones



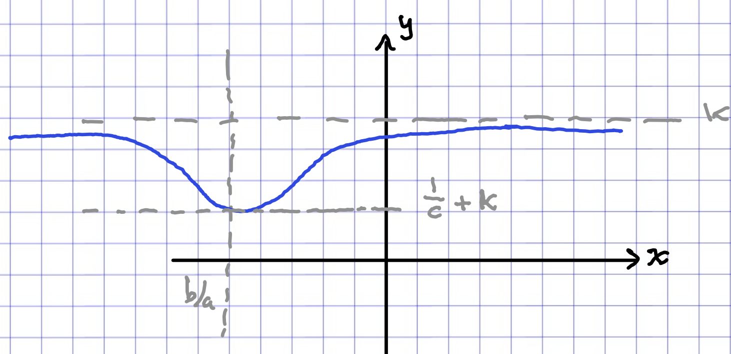
Caso 2 Tenemos $-(ax-b)^2+c$ (signo negativo) & la función tiene indeterminaciones



Caso 3 Tenemos $+ (ax-b)^2 + c$ (signo positivo) & la función NO tiene indeterminaciones.



Caso 4 Tenemos $- (ax-b)^2 + c$ (signo negativo) & la función NO tiene indeterminación.



Clase 18: Practicando bosquejo

NIVEL 1

¿Qué tipo de función es esta?

$$x \mapsto 4x + 3$$

$$x \mapsto -3x^2 + 8$$

$$x \longmapsto 2(x+1)^2 - 1$$

$$x \longmapsto \frac{3-\sqrt{5-x}}{7}$$

$$x \longmapsto \sqrt{1-x^2}$$

$$x \mapsto \frac{1}{x-6} + \frac{1}{2}$$

$$x \mapsto -5 + \sqrt{3 - (x-1)^2}$$

$$x \longmapsto -\sqrt{x-6}$$

$$x \longmapsto 5 + \frac{\sqrt{-x}}{2}$$

$$x \longmapsto -1-\sqrt{5-x^2}$$

$$x \mapsto -6x + 3$$

$$x \longmapsto -6x^2 + 3$$

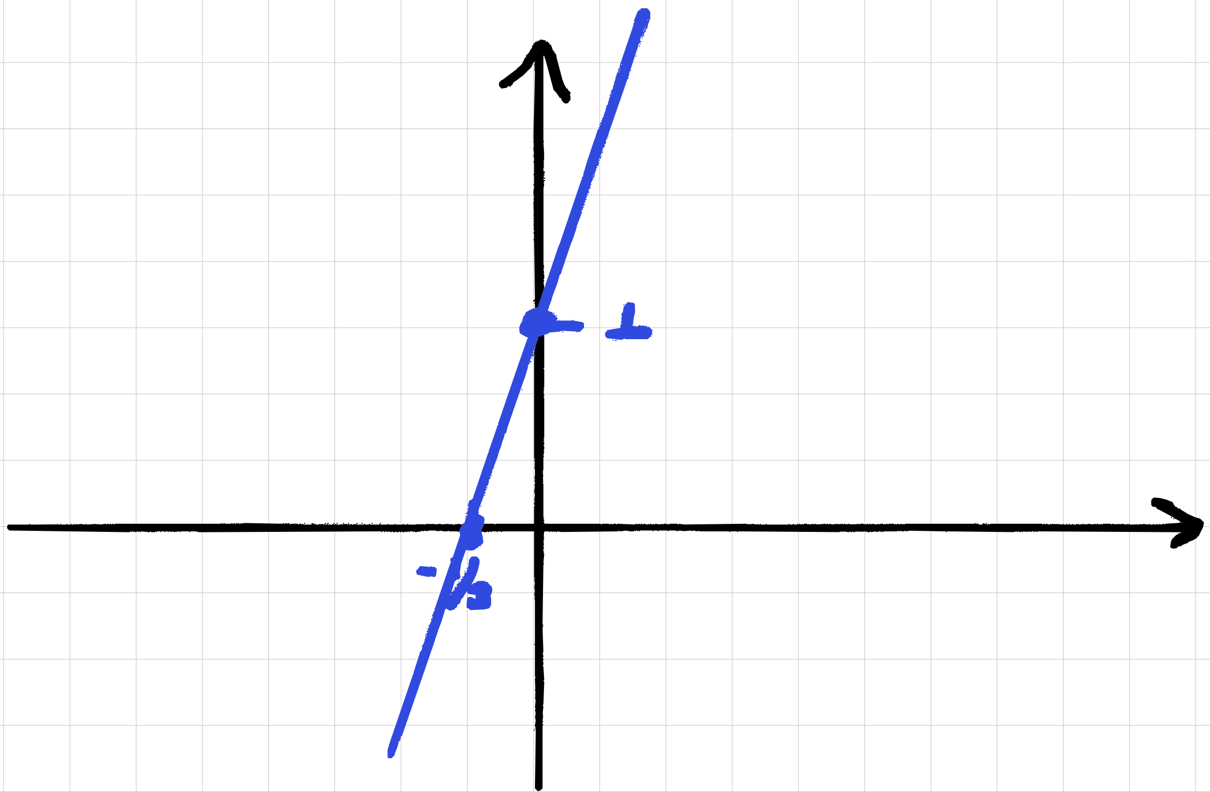
$$x \longmapsto -\frac{1}{x-2}+3$$

$$x \mapsto \sqrt{6-(x-3)^2}$$

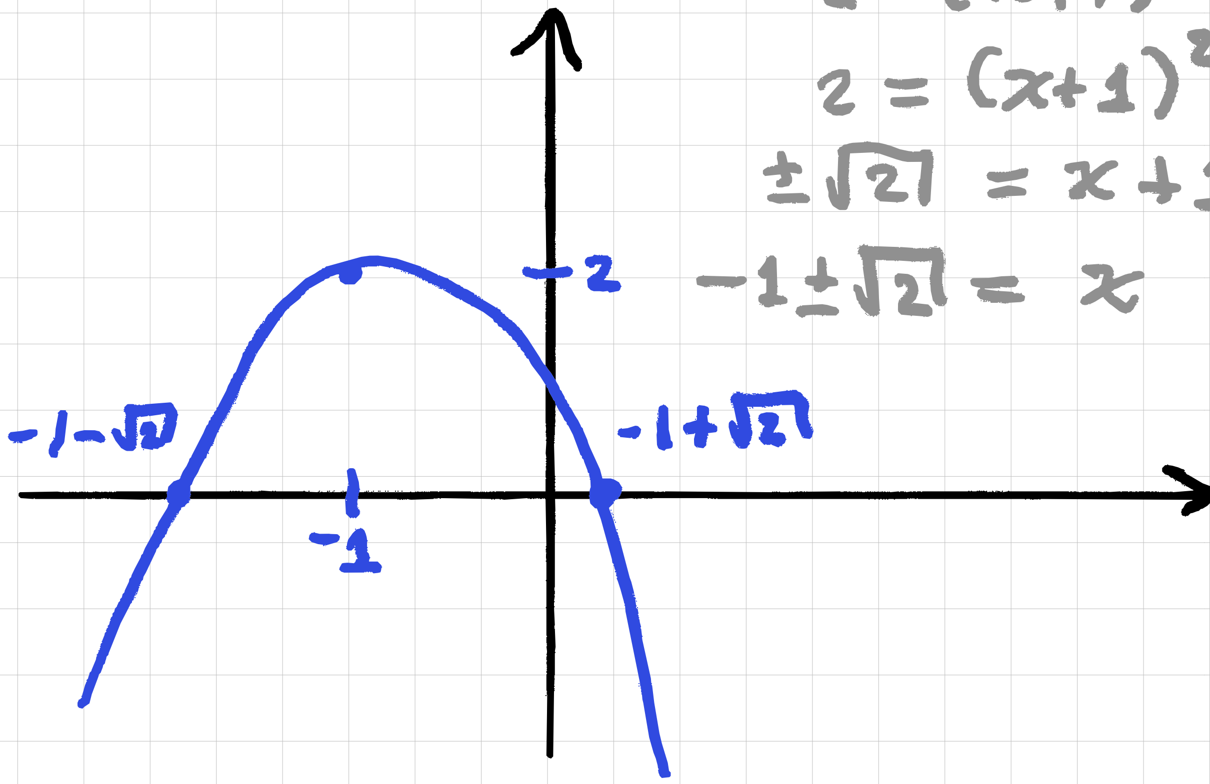
NIVEL 2

Bosquejando...

$$x \mapsto 3x + 1$$



$$x \mapsto 2-(x+1)^2$$



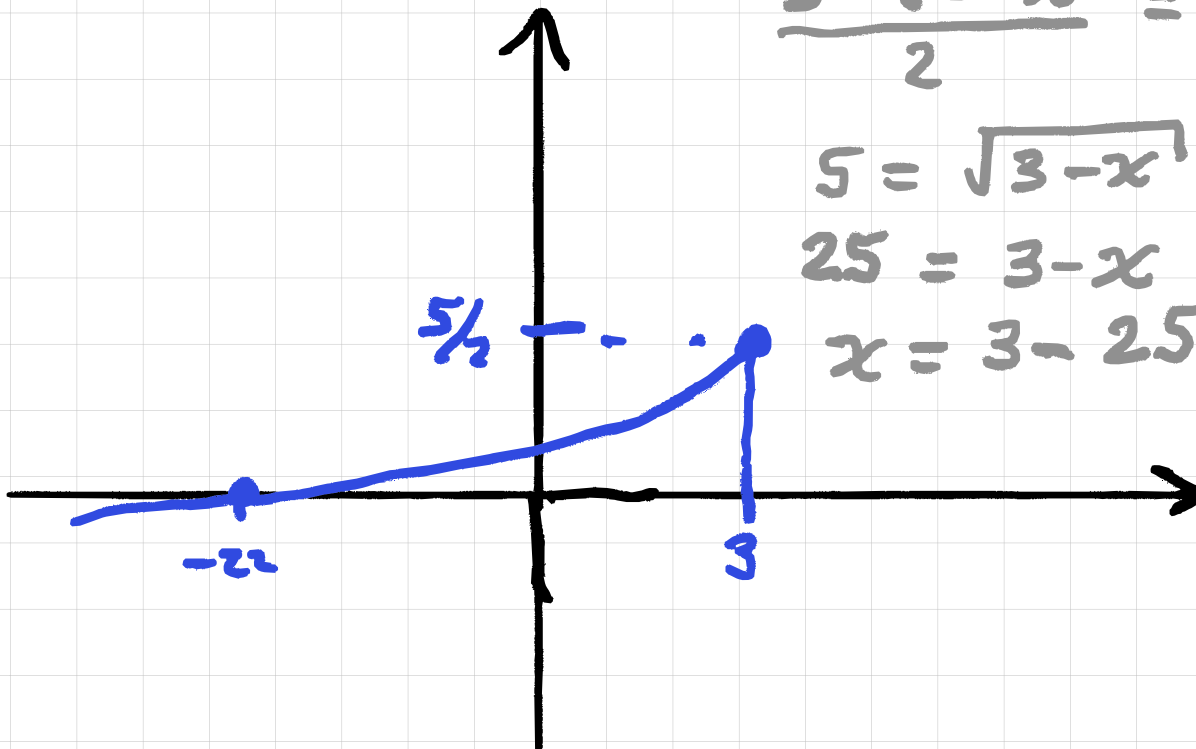
$$2-(x+1)^2=0$$

$$2=(x+1)^2$$

$$\pm\sqrt{2}=x+1$$

$$-1\pm\sqrt{2}=x$$

$$x \mapsto \frac{5 - \sqrt{3-x}}{2}$$



$$\frac{5 - \sqrt{3-x}}{2} = 0$$

$$5 = \sqrt{3-x}$$

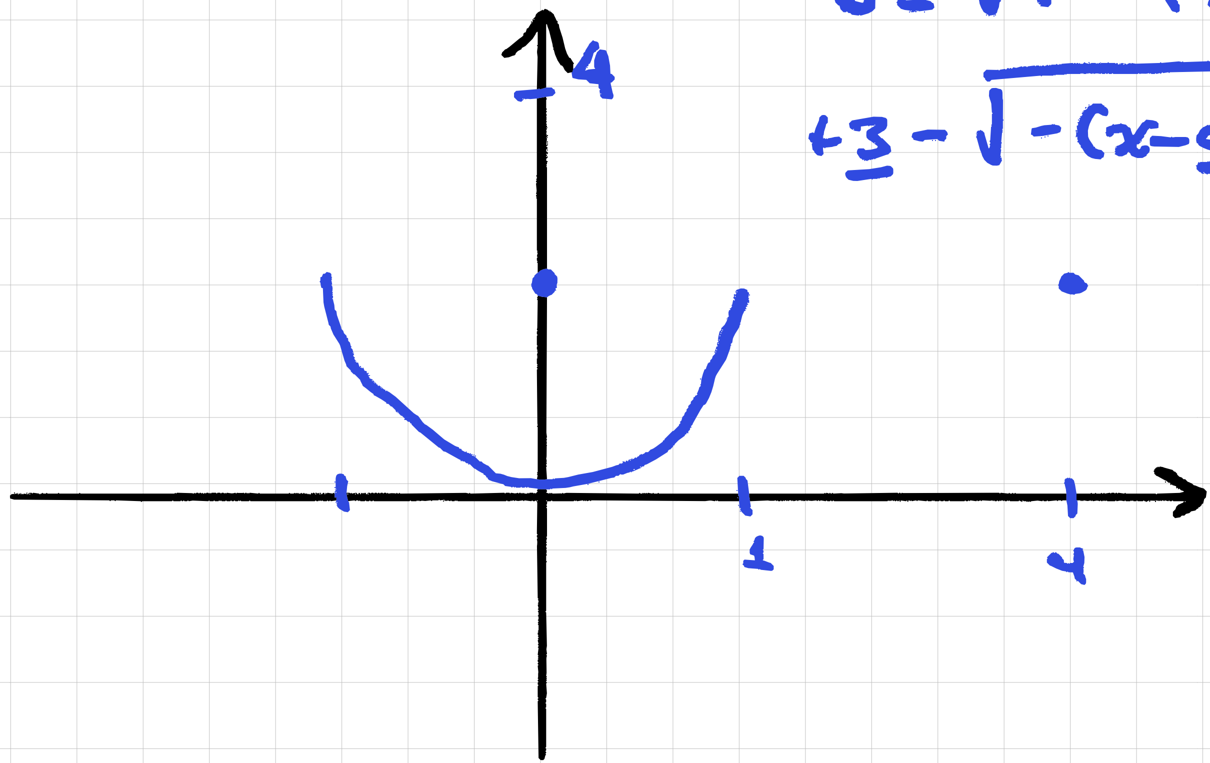
$$25 = 3 - x$$

$$x = 3 - 25 = -22$$

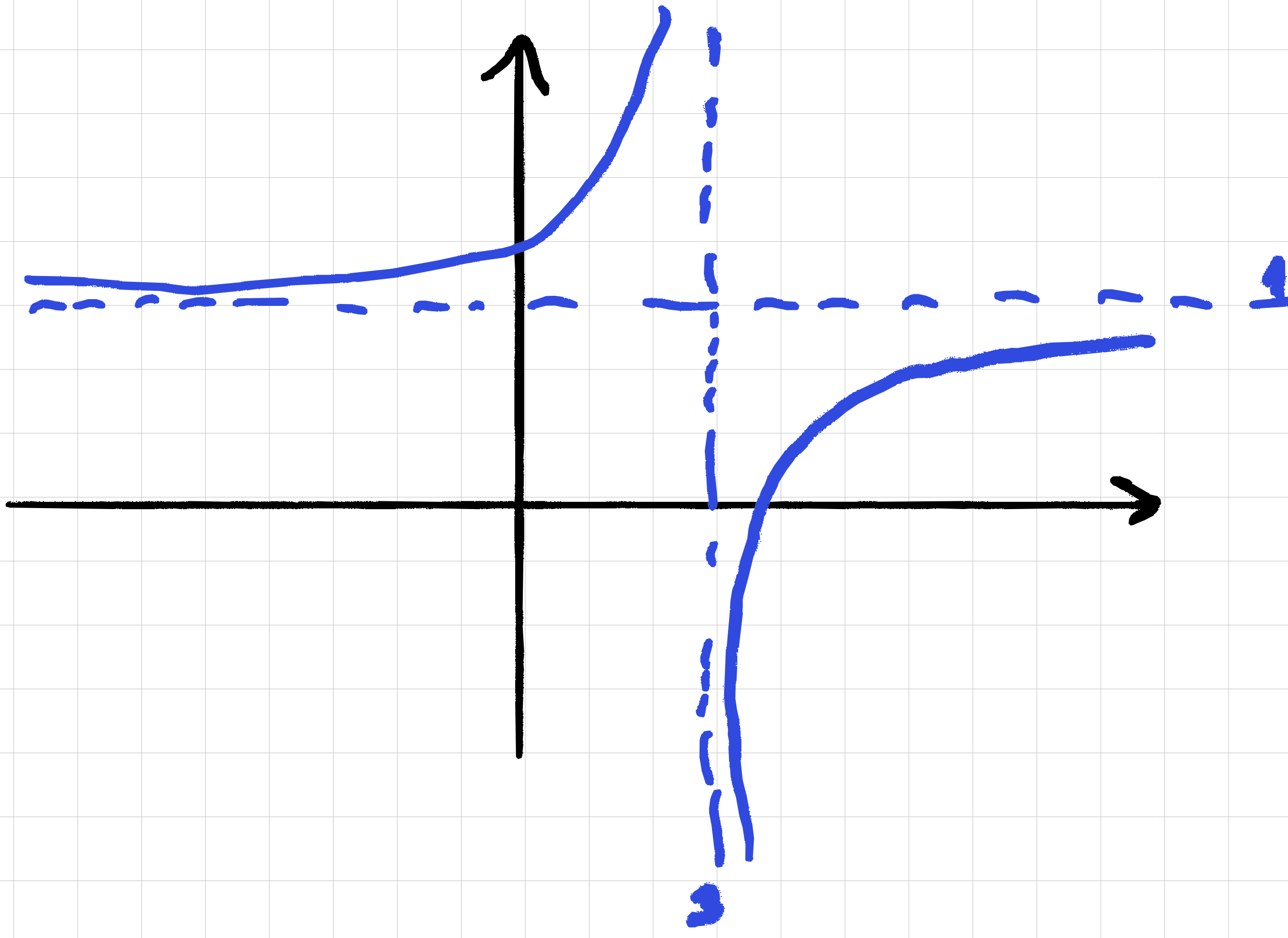
$$x \mapsto 3 - \sqrt{-x^2+1}$$

$$b \pm \sqrt{r^2-(x-a)^2}$$

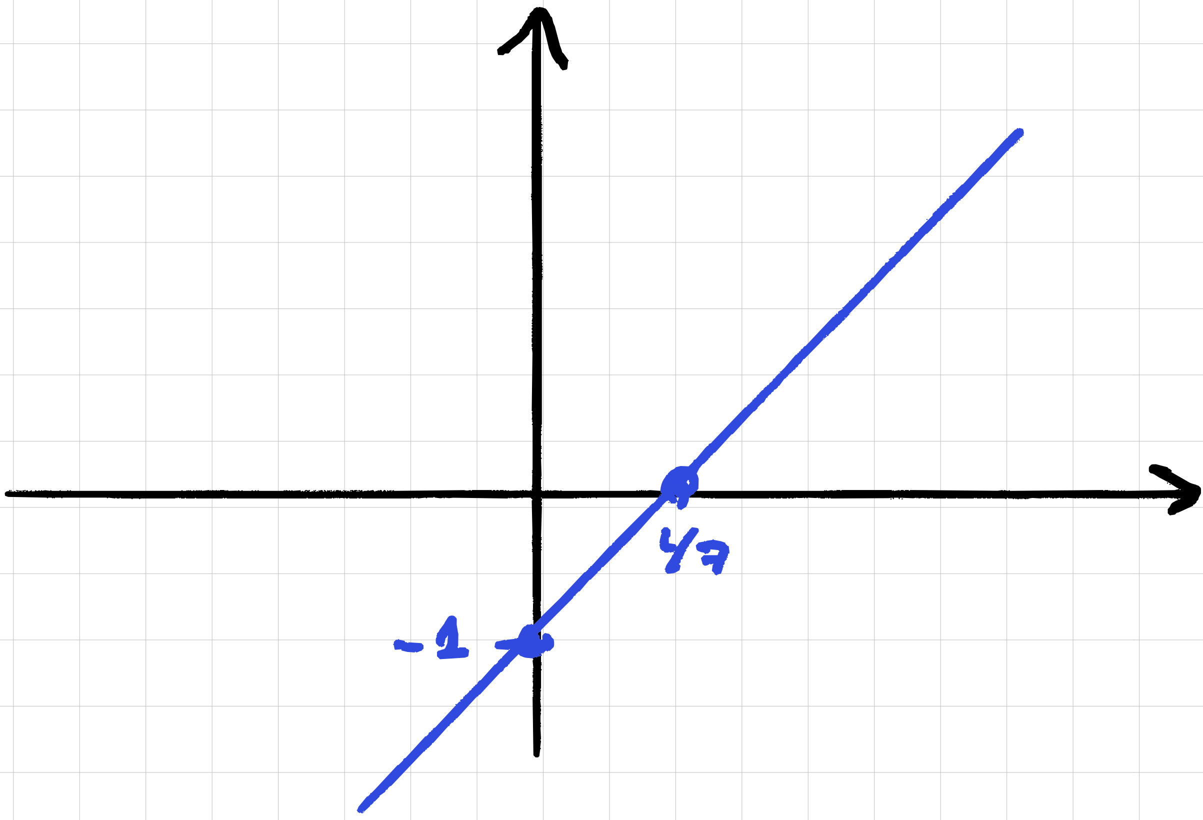
$$+\underline{3} - \sqrt{-(x-\underline{a})^2+1}$$



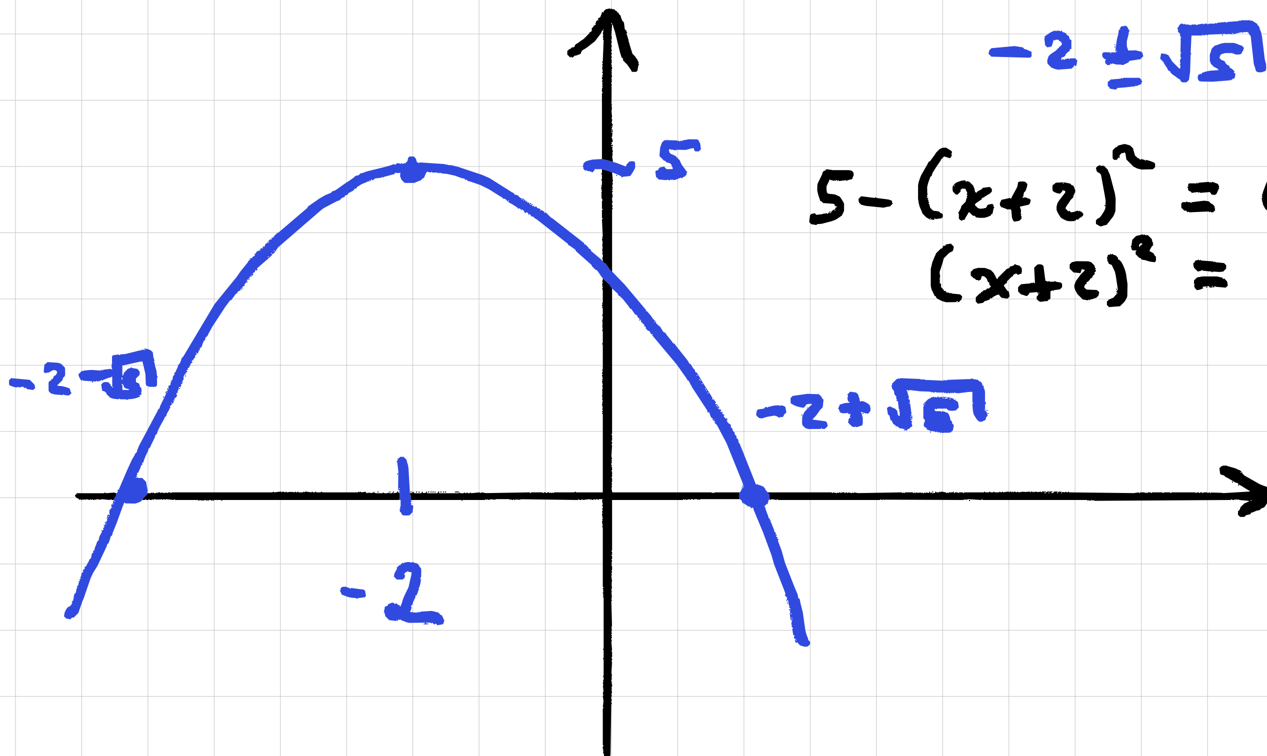
$$x \longmapsto \frac{1}{3-x} + 1$$



$$x \longmapsto 7x - 1$$



$$x \mapsto 5-(x+2)^2$$

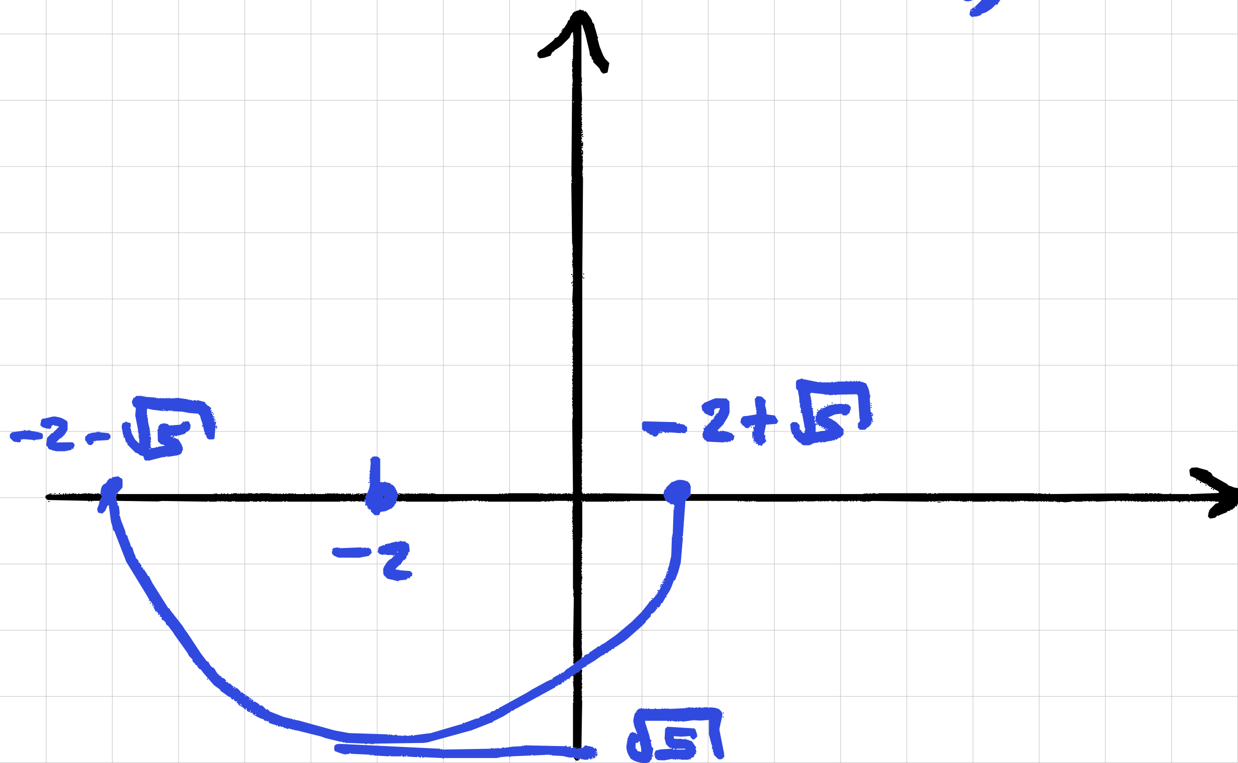


$-2 \pm \sqrt{5}$

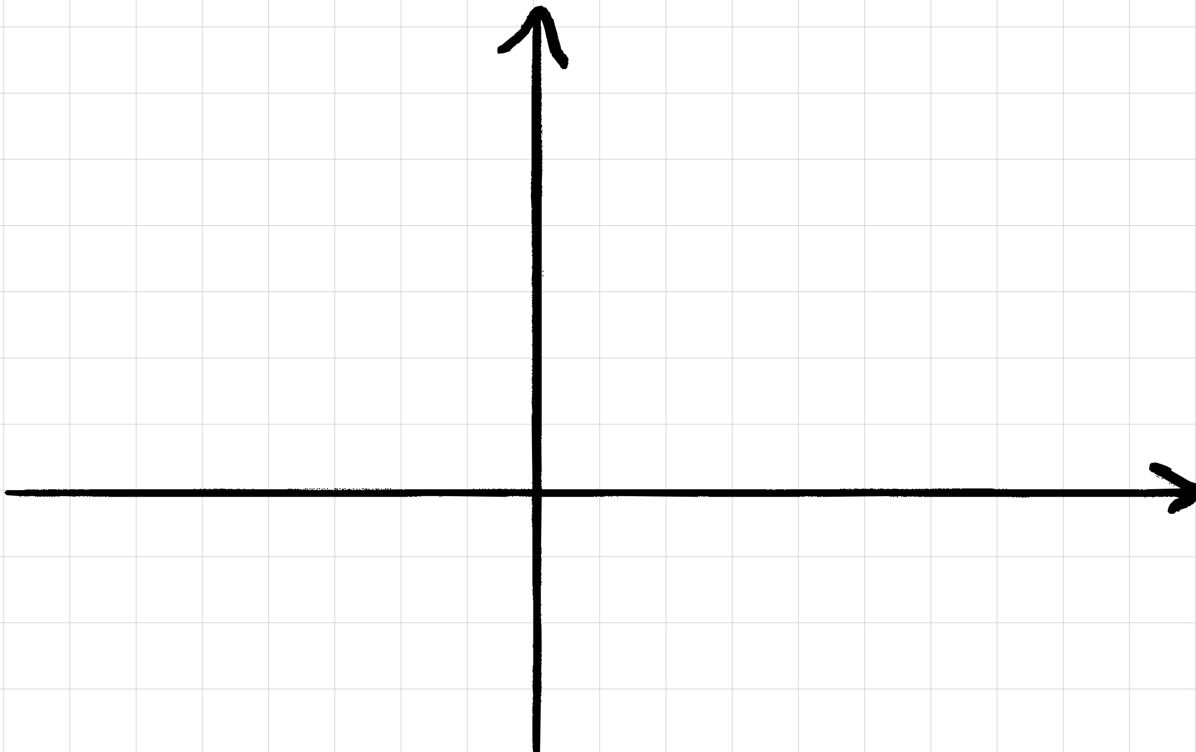
$$5-(x+2)^2 = 0$$
$$(x+2)^2 = 5$$

$$x \mapsto -\sqrt{5-(x+2)^2}$$

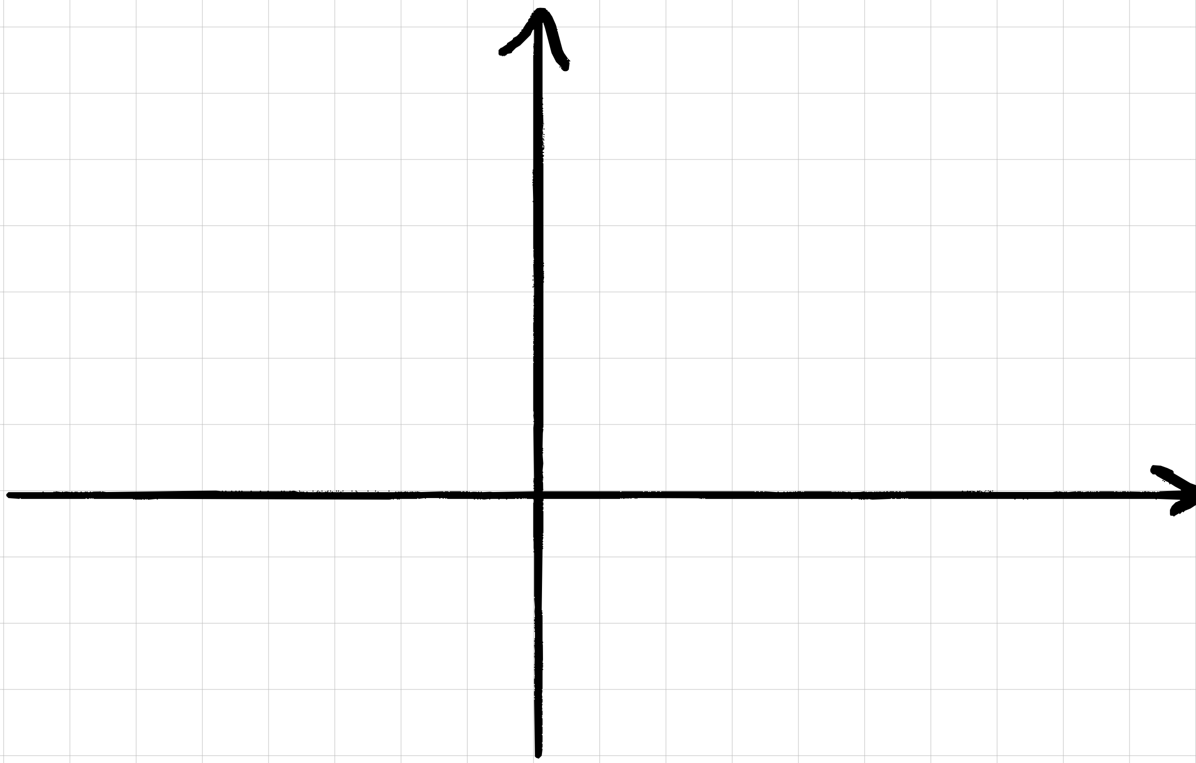
$(x-a)$



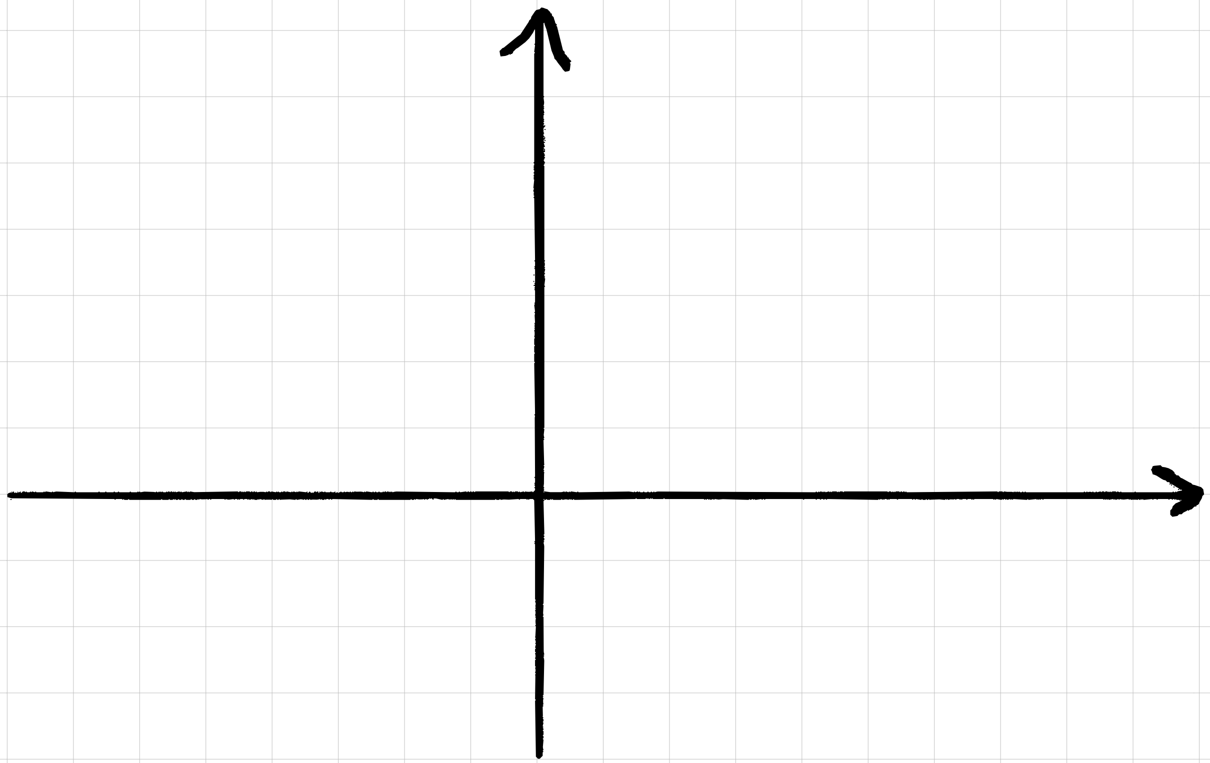
$$x \mapsto -\sqrt{5-x} - 2$$



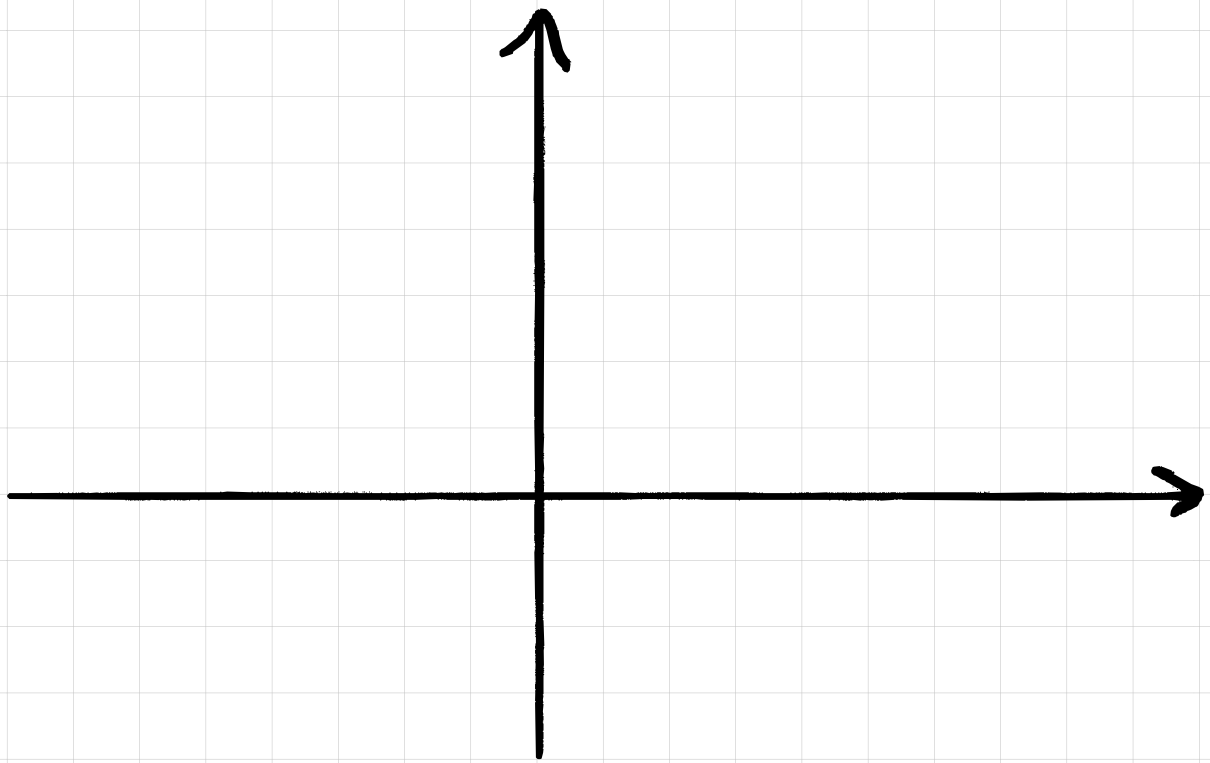
$$x \longmapsto \frac{1}{x+6} - \frac{1}{2}$$



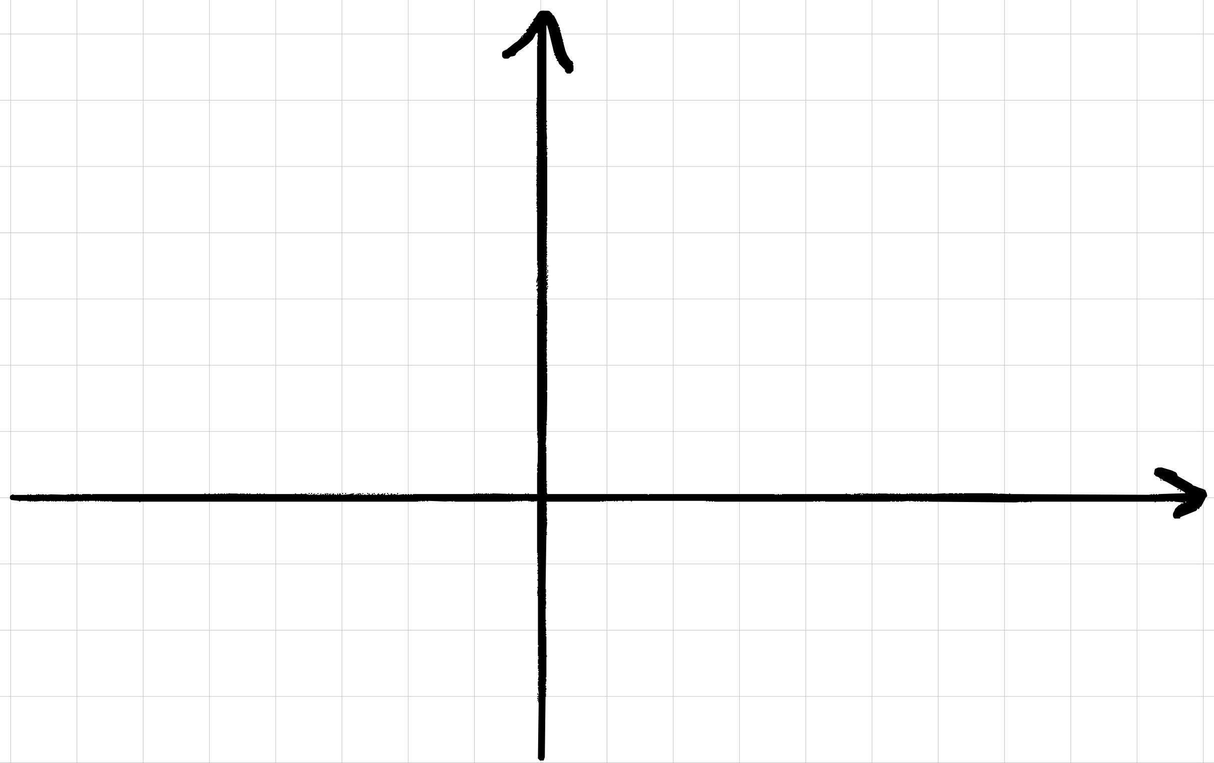
$x \mapsto 5x$



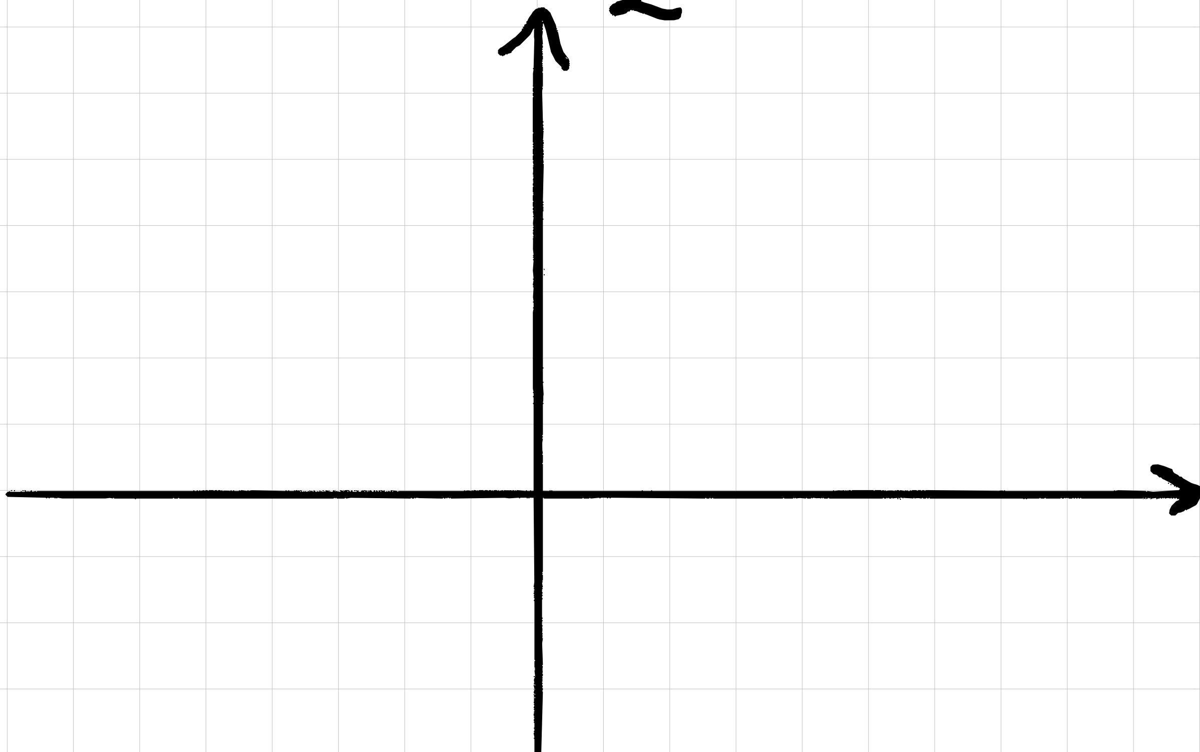
$$x \mapsto 1 + \sqrt{-x^2 + 9}$$



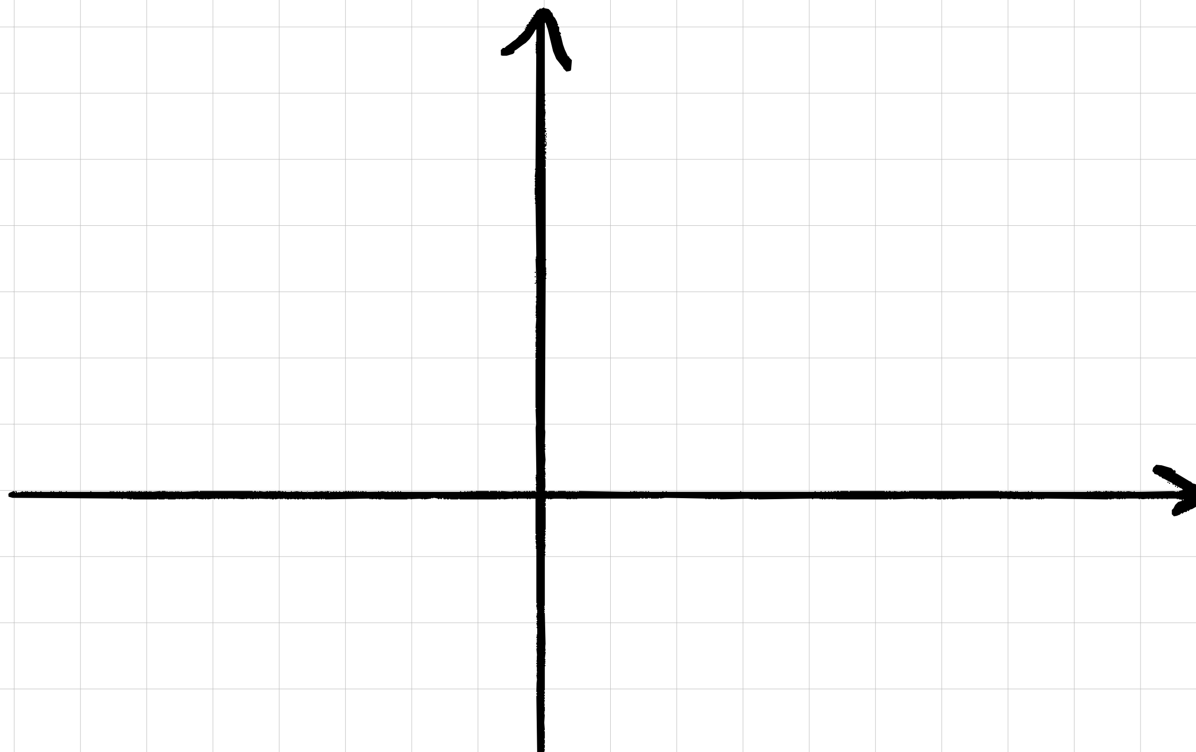
$$x \mapsto -(x-1)^2 - 1$$



$$x \mapsto \frac{-1+\sqrt{x-3}}{2}$$

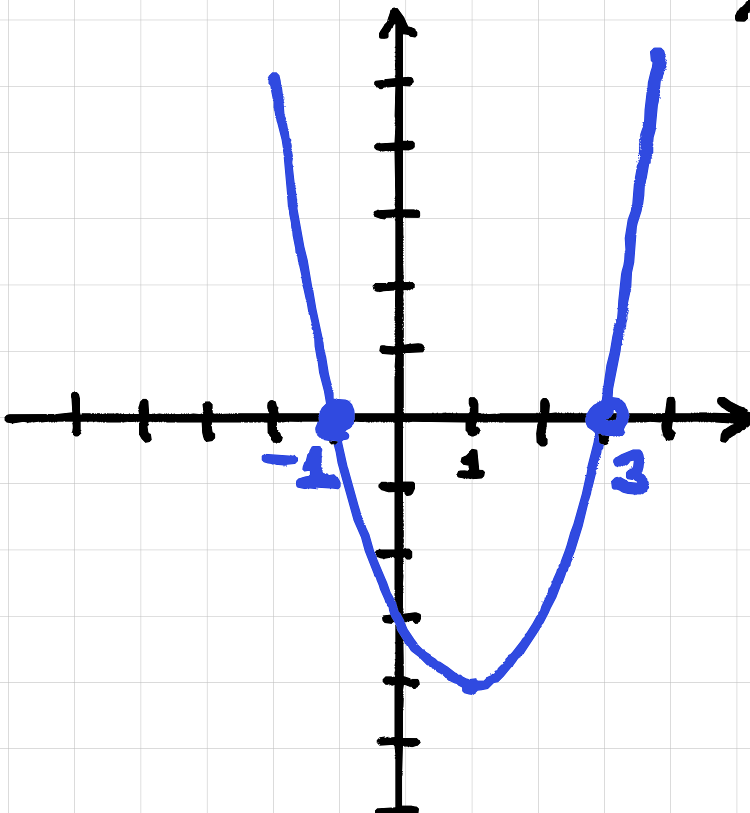


$$x \mapsto 1 + \sqrt{49 - (x-1)^2}$$



Pizza con cubiertos

$$x \mapsto x^2 - 2x - 3$$



$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Clase 19 & 20: Repaso Unidad I

8 y 9, Septiembre 2025

Presentación disponible en la sección de materiales del curso.

Unidad II: Cálculo matricial & Sistemas de ecuaciones

Clase 21: Definición de vectores
Miércoles 10, Septiembre 2025

Def (Vectores) Un <u>vector</u> de tamaño n consiste de una lista ordenada de n números reales. //

Estas listas ordenadas se denotan entre parentesis de la sig. forma:

$$(2,\ 0,\ 1/2)$$

componente o entrada

<u>Q&A</u> ¿Que tamaño tiene este vector? ¿Es igual a $(0, 2, 1/2)$?

Por conveniencia, solemos denotar vectores usando las letras $\underline{v}, \underline{w}, \underline{u}$; aunque cualquier otra letra es permitida; & escribimos

$$\underline{v} = (2, 0, 1/2)$$

para representar la asignación.

El conjunto de todos los vectores de tamaño n se representa por el símbolo $\mathbb{R}^n$, donde $\mathbb{R}$ representa que las entradas de los vectores son números reales & n el tamaño de los vectores.

Q&A Dado $\underline{v} = (2, 0, -5, 1/3)$
¿Qué tamaño tiene? ¿Qué número está en la entrada (componente) 3?

e.g. Suponga que una máquina monitorea los signos vitales de una persona & están organizados de la sig. forma:
Frecuencia cardiaca (LPM), Presión arterial (MMHG), Frecuencia respiratoria (RPM), Temperatura (°C), Saturación de oxigen (%). Los resultados de salida serán vectores:

$$\underline{v} = (110, 100, 15, 36, 98)$$

Q&A ¿Cuál es el tamaño del vector?
¿Es importante el orden?

Notación En ocasiones es conveniente trabajar con vectores organizados verticalmente, es decir, si tenemos un vector

$$\underline{v} = (110, 100, 15, 36, 98)$$

en forma vertical sería $\underline{v} = \begin{pmatrix} 110 \\ 100 \\ 15 \\ 36 \\ 98 \end{pmatrix}$.

Cuando está en su foma horizontal lo denominamos vector fila & en su forma vertical vector columna.

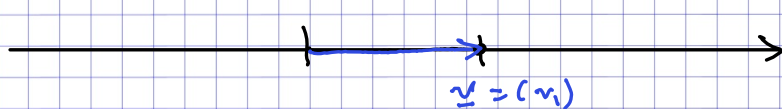
Q&A ¿A qué nos referimos por conveniencia?

- Ahorro de espacio en escritura
- Operaciones
- Organización de los datos

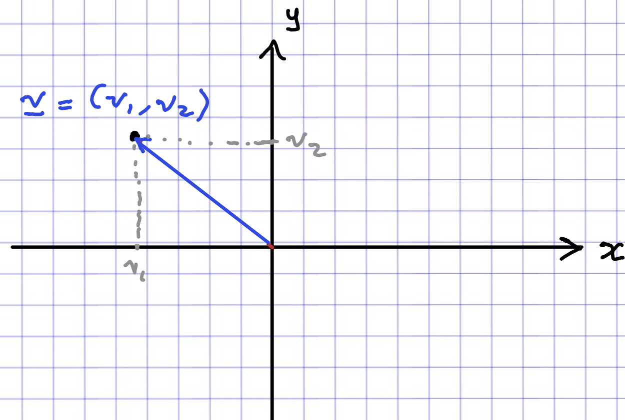
Geometría de vectores

Nuestra "capacidad geométrica" está limitada a 3 (y en ocasiones a 4) dimensiones.

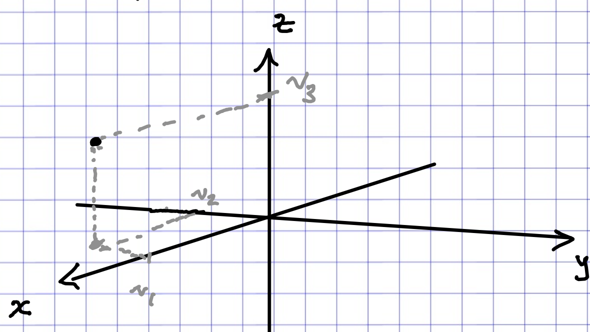
Vectores de tamaño 1. Estos son de la forma $\underline{v} = (v_1)$, donde $v_1 \in \mathbb{R}$. Se representan en la recta real



Vectores de tamaño 2 Estos son de la forma $\underline{v} = (v_1, v_2)$, donde $v_1, v_2 \in \mathbb{R}$, & se representan en el plano cartesiano.



Vectores de tamaño 3 Estos son de la forma $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$, donde $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}$ & se representan en el espacio



e.g. Representa los siguientes vectores en el espacio que correspondan: (1), $(-2, 0)$ $(-3, 1, 2)$.

Clase 22: Operaciones con vectores
Jueves 11, Septiembre 2025

Lo que distingue a vectores en $\mathbb{R}^2$ (y en general en $\mathbb{R}^n$) con puntos en el plano es que con vectores podemos hacer operaciones.

Consideremos el sig. ejemplo

e.g.: Una persona invierte en 4 acciones. Comenzando desde 01-Ene-1998, esta persona registra la ganancia/pérdida respecto al valor en 01-Ene-1998 al final de cada semana.

	A1	A2	A3	A4
S1	100	150	-50	50
S2	50	-50	70	-50
S3	-150	-100	-20	0

Suma de vectores

Sean $\underline{v}, \underline{w}$ vectores en $\mathbb{R}^n$, la suma de $\underline{v}$ & $\underline{w}$ se define como

$$\underline{v} + \underline{w} = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, \ldots, v_n + w_n),$$

es decir, es el vector obtenido al sumar componente a componente.

Q&A ¿Cuál es la pérdida/ganancia total (combinada) al final de la segunda semana?

$$(100+50,\ 150-50,\ -50+70,\ 50-50)$$

$$= (150, 100, 20, 0)$$

Multiplicacion escalar

Sean $c \in \mathbb{R}$ (se le llama escalar) y $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$ un vector. Entonces el producto escalar de c con $\underline{v}$ es definido como

$$c\underline{v} = (cv_1, cv_2, \ldots, cv_n),$$

es decir, el vector es obtenido al multiplicar cada componente de $\underline{v}$ por c.

Q&A Si las ganancias/perdidas fueron reportadas en dólares & queremos saber su valor en pesos mexicanos ¿Cuál sería el vector de ganancia/pérdida de la semana 1?

$$20(100, 150, -50, 50) =$$

$$(2000, 3000, -1000, 1000)$$

Obs •) Solo podemos sumar vectores del mismo tamaño.

•) Por formalidad, sumamos vectores en su forma vertical u horizontal, nunca combinados.

Vector transpuesto

Si $\underline{v}$ es un vector fila en $\mathbb{R}^n$ & $\underline{w}$ es un vector columna en $\mathbb{R}^n$, entonces $\underline{v}^T$ & $\underline{w}^T$ son la representación en columna & fila de $\underline{v}$ & $\underline{w}$, resp.
A $\underline{v}^T$ se le llama el transpuesto de $\underline{v}$.

e.g. $\underline{v} = (0, 3, 1) \rightsquigarrow \underline{v}^T = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\underline{w} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \underline{w}^T = (5, 2, -1)$ //

Según la observación anterior, no podemos sumar $\underline{v}$ & $\underline{w}$. Sin embargo,

$$\underline{v} + \underline{w}^T \quad \& \quad \underline{v}^T + \underline{w}$$

son operaciones válidas & $\underline{v} + \underline{w}^T$ es el vector transpuesto de $\underline{v}^T + \underline{w}$.

Longitud de un vector

Sea $\underline{v}$ un vector en $\mathbb{R}^n$. La longitud de $\underline{v}$ se define como

$$\|\underline{v}\| = \sqrt{v_1^2 + \cdots + v_n^2}$$

e.g. Si $\underline{v} = (1, 2)$, entonces su longitud es

$$\|\underline{v}\| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

Producto interior

Sean $\underline{v}, \underline{w}$ vectores en $\mathbb{R}^n$ (ambos en su representación fila o columna). El producto interior (o producto punto) entre $\underline{v}$ & $\underline{w}$ se define como

$$\underline{v} \cdot \underline{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \cdots + v_n w_n$$

e.g. Si $\underline{v} = (10, 15, 20, 10, 5)$ representa la cantidad de unidades de 5 productos comprada por una familia y $\underline{w} = (2, 1.5, 0.5, 1, 4)$ el precio por unidad de cada producto, entonces

$$\underline{v} \cdot \underline{w} = 20 + 22.5 + 10 + 10 + 20 = 82.5$$

es el total gastado en la compra.

Clase 23: Propiedades de las operaciones con vectores

Viernes 12, Septiembre 2025

Para hacer operaciones con vectores con facilidad debemos aprender sus propiedades. Estas recurren a propiedades conocidas de los números reales.

Teorema 1

Sean $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ vectores en $\mathbb{R}^n$. Las siguientes afirmaciones son verdaderas:

(1) $(\underline{u} + \underline{v}) + \underline{w} = \underline{u} + (\underline{v} + \underline{w})$

(2) $\underline{u} + \underline{v} = \underline{v} + \underline{u}$

(3) $\underline{0} + \underline{v} = \underline{v} = \underline{v} + \underline{0}$, donde $\underline{0}$ es el vector cuyas entradas son todas cero.

(4) $\underline{v} + (-\underline{v}) = \underline{0} = (-\underline{v}) + \underline{v}$

__Dem__ (1) Por definición de suma de vectores y asociatividad de los números reales tenemos que

$$
\begin{aligned}
(\underline{u} + \underline{v}) + \underline{w} &= (u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n) \\
&\quad + (w_1, \dots, w_n) \\
&= (u_1 + (v_1 + w_1), \dots, u_n + (v_n + w_n))
\end{aligned}
$$

$$= (u_1, \ldots, u_n) + (v_1 + w_1, \ldots, v_n + w_n)$$
$$= \underline{u} + (\underline{v} + \underline{w})$$

(2) Por conmutatividad de los números reales tenemos que

$$\underline{u} + \underline{v} = (u_1 + v_1, \ldots, u_n + v_n)$$
$$= (v_1 + u_1, \ldots, v_n + u_n)$$
$$= \underline{v} + \underline{u}$$

(3) Usando (2) basta con probar la primera igualdad:

$$\underline{0} + \underline{v} = (0 + v_1, \ldots, 0 + v_n)$$
$$= (v_1, \ldots, v_n) = \underline{v}$$

(4) Recuerde que $-\underline{v} = (-v_1, \ldots, -v_n)$, entonces

$$\underline{v} + (-\underline{v}) = (v_1 - v_1, \ldots, v_n - v_n)$$
$$= \underline{0}$$

La igualdad restante se sigue de (2) ■

Notación Sean $\underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{R}^n$. Escribiremos $\underline{v} - \underline{w}$ en lugar de $\underline{v} + (-\underline{w})$.

Q&A Consideren $\underline{v} = (3,1)$ & $\underline{w} = (-5,3)$

- Calculen $\underline{v} + \underline{w}$
- Calculen $\underline{w} + \underline{v}$

Teo 2 Sean $\underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{R}^n$ & $c \in \mathbb{R}$. Entonces

$$c(\underline{v} + \underline{w}) = c\underline{v} + c\underline{w}$$

Dem Por distributividad de los números reales, tenemos que

$$\begin{aligned} c(\underline{v} + \underline{w}) &= c(v_1 + w_1, \ldots, v_n + w_n) \\ &= (c(v_1 + w_1), \ldots, c(v_n + w_n)) \\ &= (cv_1 + cw_1, \ldots, cv_n + cw_n) \\ &= (cv_1, \ldots, cv_n) + (cw_1, \ldots, cw_n) \\ &= c\underline{v} + c\underline{w} \end{aligned}$$

$\blacksquare$

Ej Considera $\underline{v} = (1,0)$, $\underline{w} = (3,-1)$. Calcula $2(\underline{v} + \underline{w})$ & $2\underline{v} + 2\underline{w}$.

Teo 3 Sean $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{R}^n$ & $c \in \mathbb{R}$. Las siguientes afirmaciones son verdaderas.

(1) $\underline{u} \cdot \underline{v} = \underline{v} \cdot \underline{u}$

(2) $(\underline{u} + \underline{v}) \cdot \underline{w} = \underline{u} \cdot \underline{w} + \underline{v} \cdot \underline{w}$
$= \underline{w} \cdot (\underline{u} + \underline{v})$

(3) $(c\underline{u}) \cdot \underline{w} = c(\underline{u} \cdot \underline{w}) = \underline{u} \cdot (c\underline{w})$

Dem (1) Usamos la conmutatividad del producto de números reales:

$$\begin{aligned}\underline{u}\cdot\underline{v} &= u_1v_1+\cdots+u_nv_n\\ &= v_1u_1+\cdots+v_nu_n\\ &= \underline{v}\cdot\underline{u}\end{aligned}$$

(2) Por distributividad de los números reales & la conmutatividad de la suma tenemos que

$$\begin{aligned}(\underline{u}+\underline{v})\cdot\underline{w} &= (u_1+v_1,\dots,u_n+v_n)\cdot(w_1,\dots,w_n)\\ &= (u_1+v_1)w_1+\cdots+(u_n+v_n)\cdot w_n\\ &= u_1w_1+v_1w_1+\cdots+u_nw_n+v_nw_n\\ &= (u_1w_1+\cdots+u_nw_n)+(v_1w_1+\cdots+v_nw_n)\\ &= \underline{u}\cdot\underline{w}+\underline{v}\cdot\underline{w}\end{aligned}$$

La igualdad restante se sigue de (1).

(3) Por distributividad de los números reales tenemos que

$$\begin{aligned}(c\underline{u})\cdot\underline{w} &= cu_1w_1+\cdots+cu_nw_n\\ &= c(u_1w_1+\cdots+u_nw_n)\\ &= c(\underline{u}\cdot\underline{w})\end{aligned}$$

La igualdad restante se sigue de la conmutatividad del producto. ∎

$\underline{\text{Ej}}$ Compreba que los resultados anteriores se cumplen si $\underline{u} = (-1, 3)$, $\underline{v} = (5, 8)$, $\underline{w} = (1, 2)$ & $c = 7$.

Referencias

- [MH17] Linear algebra: A course for Physicists and Engineers. Mathai & Haubold, (p.p. 1 – 10)
- [GF12] Álgebra lineal. Grossman & Flores, (p.p. 46-88)