Soluciones: Ejercicios en Álgebra Matricial

Ingeniería Biomédica 1°B
Universidad Autónoma de Aguascalientes, Agosto-Diciembre 2025
Profesor: Brian Villegas Villalpando
Tarea 1 (Fecha de entrega: Lunes 25 de agosto, 8:00 am)

Instrucciones: Por cada problema, **resuelve 2 de los 3 incisos**. Escribe clara y ordenadamente los procedimientos necesarios para justificar la respuesta. Se ponderará con un 10% a un resultado correcto y con un 90% a un procedimiento correcto. El uso de los *Hints* es opcional.

Problema 1.1 (Productos de expresiones algebraicas, 1+9 puntos)
Realiza los siguientes productos y simplifica de ser necesario. Si requieres orientación sobre el procedimiento, considera el siguiente ejemplo: Ver video.

(a) $(2x-5)(3x+2)$

$$\begin{aligned}(2x-5)(3x+2) &= 2x(3x+2)-5(3x+2)\\ &= 6x^2+4x-15x-10\\ &= 6x^2-11x-10\end{aligned}$$

(b) $(5x-4y)(3x-y)$

$$\begin{aligned}(5x-4y)(3x-y) &= 5x(3x-y)-4y(3x-y)\\ &= 15x^2-5xy-12xy+4y^2\\ &= 15x^2-17xy+4y^2\end{aligned}$$

(c) $(2a^3-3a+4)(2a-1)$

$$\begin{aligned}(2a^3-3a+4)(2a-1) &= 2a^3(2a-1)-3a(2a-1)+4(2a-1)\\ &= 4a^4-2a^3-6a^2+3a+8a-4\\ &= 4a^4-2a^3-6a^2+11a-4\end{aligned}$$

Problema 1.2 (Binomios al cuadrado, 1+9 puntos)
Desarrolla las siguientes expresiones: Para resolver estos ejercicios usamos la siguiente regla:

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2.$$

(a) $(2a-1)^2$

$$\begin{aligned}(2a-1)^2 &= (2a)^2+2(2a)(-1)+(-1)^2\\ &= 4a^2-4a+1\end{aligned}$$

(b) $(2x+3y)^2$

$$\begin{aligned}(2x-3y)^2 &= (2x)^2+2(2x)(3y)+(3y)^2\\ &= 4x^2+12xy+9y^2\end{aligned}$$

(c) $(\frac{x}{4} - 2y^3)^2$

$$\begin{aligned}\left(\frac{x}{4} - 2y^3\right)^2 &= (\tfrac{x}{4})^2 + 2(\tfrac{x}{4})(-2y^3) + (-2y^3)^2 \\ &= \frac{x^2}{16} + -\frac{4xy^3}{4} + 4y^6 \\ &= \frac{x^2}{16} - xy^3 + 4y^6\end{aligned}$$

Hint: Usa los siguientes pasos para desarrollar las expresiones:

1. Expresa el binomio al cuadrado como un producto: $(x+8)^2 = (x+8)(x+8)$.
2. Resuelve el producto usando lo aprendido en el Problema 1.1: $(x+8)(x+8) = x^2 + 8x + 8x + 8^2$
3. Simplifica la expresión obtenida: $x^2 + 8x + 8x + 8^2 = x^2 + 16x + 64$.
4. Concluye: $(x+8)^2 = x^2 + 16x + 64$.

Problema 1.3 (Ecuaciones lineales, 1+9 puntos)
Resuelve las siguientes ecuaciones para la variable x:

(a) $x - (2x+1) = 8 - (3x+3)$

$$\begin{aligned}&(0) & x - (2x+1) &= 8 - (3x+3) \\ &(1) & (x - 2x) - 1 &= (8-3) - 3x \\ &(2) & -x - 1 &= 5 - 3x \\ &(3) & 3x - x &= 5 + 1 \\ &(4) & 2x &= 6 \\ &(5) & x &= \tfrac{6}{2} = 3\end{aligned}$$

(b) $15x - 20 = 6x - (x+2) + (-x+3)$

$$\begin{aligned}&(0) & 15x - 20 &= 6x - (x+2) + (-x+3) \\ &(1) & 15x - 20 &= 6x - x - 2 - x + 3 \\ &(2) & 15x - 20 &= 4x + 1 \\ &(3) & 15x - 4x &= 20 + 1 \\ &(4) & 11x &= 21 \\ &(5) & x &= 21/11\end{aligned}$$

(c) $(x+1)^3 - (x-1)^3 = 6x(x-3)$ En este problema usamos la siguiente regla:

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2).$$

Simplifiquemos primero la expresión de la izquierda:

$$\begin{aligned}(x+1)^3 - (x-1)^3 &= ((x+1) - (x-1))((x+1)^2 + (x+1)(x-1) + (x-1)^2) \\ &= 2(x^2 + 2x + 1 + x^2 - 1 + x^2 - 2x + 1).\end{aligned}$$

Para la última igualdad hemos usado la regla para un binomio al cuadrado y para diferencia de cuadrados. Continuamos simplificando la expresión:

$$\begin{aligned}(x+1)^3-(x-1)^3 &= 2(x^2+2x+1+x^2-1+x^2-2x+1)\\ &= 2(3x^2+1)\\ &= 6x^2+2.\end{aligned}$$

Ahora igualamos este resultado con la expresión a la derecha en la ecuación del problema y resolvemos:

$$\begin{aligned}&(0) \qquad & 6x^2+2 &= 6x(x-3)\\ &(1) \qquad & 6x^2+2 &= 6x^2-18x\\ &(2) \qquad & 2 &= -18x\\ &(3) \qquad & x &= -\tfrac{2}{18} = -\tfrac{1}{9}\end{aligned}$$

Hint: En el inciso (c), recuerda que $(x+1)^3 = (x+1)(x+1)(x+1)$ y una expresión similar aplica para $(x-1)^3$. Usa los Problemas 1.1 y 1.2 para desarrollar estas expresiones.

Problema 1.4 (Evaluación de reglas de correspondencia, 1+9 puntos)
Considere la siguiente regla de correspondencia:

$$x \mapsto f(x) = \frac{3x}{x^2+1}.$$

Evaluar esta regla de correspondencia en un número significa reemplazar x por dicho número en la definición de $f(x)$. Por ejemplo, evaluemos 1 en la regla de correspondencia anterior:

$$f(1) = \frac{3(1)}{(1)^2+1} = \frac{3}{1+1} = \frac{3}{2}.$$

Encuentre los valores funcionales indicados para las siguientes reglas de correspondencia:

(a) $x \mapsto f(x) = -2x^2 + x$ (Evaluar en $-5, -\frac{1}{2}, 2$ y 7)

$$\begin{aligned}f(-5) &= -2(-5)^2 + (-5) = -2(25) - 5 = -50 - 5 = -55\\ f(-\tfrac{1}{2}) &= -2(-\tfrac{1}{2})^2 + (-\tfrac{1}{2}) = -\tfrac{2}{4} - \tfrac{1}{2} = -1\\ f(2) &= -2(2)^2 + (2) = -2(4) + 2 = -8 + 2 = -6\\ f(7) &= -2(7)^2 + (7) = -2(49) + 7 = -98 + 7 = -91\end{aligned}$$

(b) $x \mapsto f(x) = \sqrt{2x+4}$ (Evaluar en $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{5}{2}$ y 4)

$$\begin{aligned}f(-\tfrac{1}{2}) &= \sqrt{2(-\tfrac{1}{2})+4} = \sqrt{-1+4} = \sqrt{3}\\ f(\tfrac{1}{2}) &= \sqrt{2(\tfrac{1}{2})+4} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}\\ f(\tfrac{5}{2}) &= \sqrt{2(\tfrac{5}{2})+4} = \sqrt{5+4} = \sqrt{9} = 3\\ f(4) &= \sqrt{2(4)+4} = \sqrt{8+4} = \sqrt{12} = \sqrt{4\cdot 3} = 2\sqrt{3}\end{aligned}$$

(c) $x \mapsto f(x) = \frac{x^2}{x^3-2}$ (Evaluar en $-\sqrt{2}, -1, 0$ y $\frac{1}{2}$)

$$
\begin{aligned}
f(-\sqrt{2}) &= \frac{(-\sqrt{2})^2}{(-\sqrt{2})^3 - 2} = \frac{2}{-2^{3/2} - 2} = \frac{2}{-2(2^{1/2} + 1)} = -\frac{1}{1 + \sqrt{2}} \\
f(-1) &= \frac{(-1)^2}{(-1)^3 - 2} = \frac{1}{-1 - 2} = -\frac{1}{3} \\
f(0) &= \frac{(0)^2}{(0)^3 - 2} = \frac{0}{0 - 2} = 0 \\
f(\tfrac{1}{2}) &= \frac{(\frac{1}{2})^2}{(\frac{1}{2})^3 - 2} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{8} - 2} = \frac{\frac{1}{4}}{-\frac{15}{8}} = -\frac{8}{4 \cdot 15} = -\frac{8}{60} = -\frac{2}{15}
\end{aligned}
$$