Soluciones: Ejercicios en Álgebra Matricial

Ingeniería Biomédica 1°B
Universidad Autónoma de Aguascalientes, Agosto-Diciembre 2025
Instructor: Brian Villegas Villalpando
Tarea 3 (Fecha de entrega: **Lunes 8 de Septiembre**, 8:00 am)

Instrucciones: Escribe clara y ordenadamente los procedimientos necesarios para justificar la respuesta. Se ponderará con un 10% a un resultado correcto y con un 90% a un procedimiento correcto.

Problema 3.1 (**Operaciones con funciones, 10 puntos**)
Considera las funciones

$$\begin{aligned} f : [1,\infty) &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sqrt{x-1} \end{aligned} \qquad y \qquad \begin{aligned} g : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto (x-2)^2 + 5. \end{aligned}$$

Encuentra el dominio de las siguientes funciones:

(a) $f + g$

(b) fg

(c) $1/f$

(d) $1/g$

Solución. (a) Para que la regla de correspondencia $x \mapsto f(x) + g(x)$ esté bien definida, debemos considerar valores de x que estén en $[1,\infty)$, el dominio de f, y en $\mathbb{R}$, el dominio de g. Por lo tanto, el dominio resultante es

$$D_{f+g} = [1,\infty) \cap \mathbb{R} = [1,\infty).$$

(b) Para que la regla de correspondencia $x \mapsto f(x)g(x)$ esté bien definida, debemos considerar valores de x que estén en $[1,\infty)$, el dominio de f, y en $\mathbb{R}$, el dominio de g. Por lo tanto, el dominio resultante es

$$D_{fg} = [1,\infty) \cap \mathbb{R} = [1,\infty).$$

(c) Para que la regla de correspondencia $x \mapsto \frac{1}{f(x)}$ esté bien definida, debemos considerar valores de x que estén en $[1,\infty)$, el dominio de f, y remover los puntos donde el denominador es cero, es decir, $x = 1$ (que se obtiene de resolver $\sqrt{x-1} = 0$). Por lo tanto, el dominio resultante es

$$D_{1/f} = [1,\infty) \setminus \{1\} = (1,\infty).$$

(d) Para que la regla de correspondencia $x \mapsto \frac{1}{g(x)}$ esté bien definida, debemos considerar los valores de x que están en $\mathbb{R}$, el dominio de g, y remover los puntos donde el denominador es cero, que en este caso no hay ningún número real que cumpla con esto (esto se ve gráficamente o al resolver $(x-2)^2 + 5 = 0$). Por lo tanto, el dominio resultante es

$$D_{1/g} = \mathbb{R}.$$

$\square$

Problema 3.2 (**Bosquejo de funciones I, 10 puntos)**
Bosqueja las funciones naturales asociadas a las siguientes reglas de correspondencia:

(a) $x \mapsto -4x+1$

(b) $x \mapsto -\frac{1}{2}x-6$

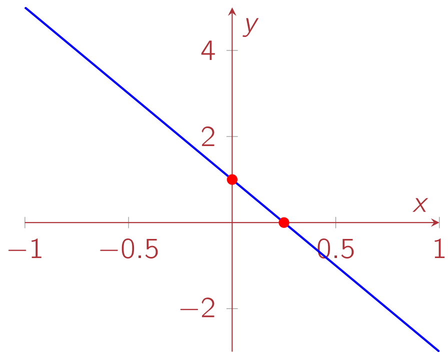
(c) $x \mapsto 14x^2-5$

(d) $x \mapsto (x-3)^2-8$

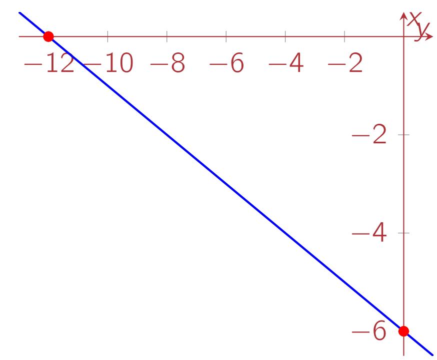
(e) $x \mapsto -(2x+1)^2+16$

(f) $x \mapsto x^2-5x-1$

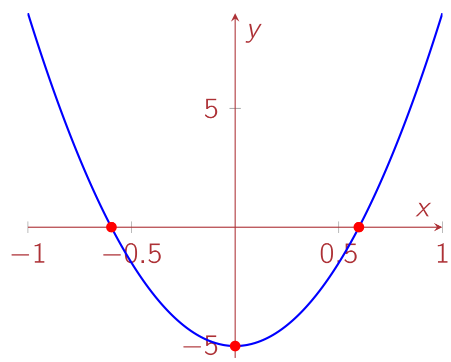
Solución. (a) Esta es una función lineal. Para bosquejar la gráfica identificamos los puntos donde la gráfica corta al eje horizontal y al vertical, es decir, $(1/4,0)$ y $(0,1)$, respectivamente.



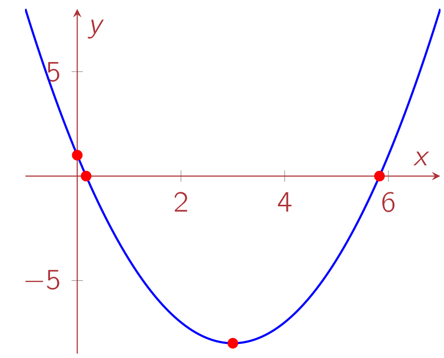
(b) Esta es una función lineal. Para bosquejar la gráfica identificamos los puntos donde la gráfica corta al eje horizontal y al vertical, es decir, $(-12,0)$ y $(0,-6)$, respectivamente.



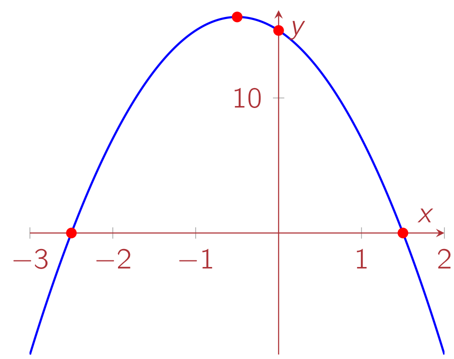
(c) Esta es una función cuadrática. Para bosquejar la gráfica comenzamos identificando el vértice, que está en $(0,-5)$. Dado que la parábola abre hacia arriba podremos calcular las raíces reales: $x_{1,2} = \pm\sqrt{5/14}$.



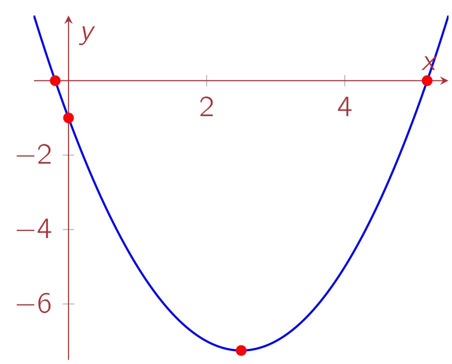
(d) Esta es una función cuadrática. Para bosquejarla comenzamos identificando el vértice, que está en $(3,-8)$. Dado que la parábola abre hacia arriba podremos calcular las raíces reales: $x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{8}$. Además, cuando $x=0$, la función toma el valor de 1.



(e) Esta es una función cuadrática. Para bosquejarla comenzamos identificando el vértice, que está en $(-1/2, 16)$. Dado que la parábola abre hacia abajo, entonces podemos calcular las raíces reales: $x_{1,2} = -1/2 \pm 2$. Además, cuando $x = 0$, la función toma el valor de 15.



(f) Esta es una función cuadrática. Para bosquejarla comenzamos identificando el vértice, que está en $(2.5, -7.25)$. Dado que la parábola abre hacia arriba, podemos calcular las raíces reales: $x_{1,2} = 2.5 \pm \sqrt{29}/2$. Además, cuando $x = 0$, la función toma el valor de -1.



□

Problema 3.3 (**Interpretando gráficas I, 10 puntos**)
Realiza lo siguiente para cada función del Problema 3.2; representa el resultado como conjunto o intervalo.

(a) Encuentra todos los puntos en el dominio donde la función es cero.

(b) Encuenta todos los puntos en el dominio donde la función es positiva, es decir, que su valor funcional sea mayor o igual que cero.

(c) Encuenta todos los puntos en el dominio donde la función es negativa, es decir, que su valor funcional sea menor o igual que cero.

Solución. Usando los bosquejos anteriores, los ceros de la función ocurren en los puntos del dominio donde la gráfica corta al eje horizontal, es mayor o igual a cero en los puntos del dominio donde la gráfica está por encima (o sobre) del eje horizontal, y es menor o igual a cero en los puntos del dominio donde la gráfica está por encima (o sobre) del eje horizontal. Interpretando la información proporcionada por las gráficas concluimos lo siguiente:

1. Para la función $x \mapsto -4x + 1$:
   - Los ceros son $\{1/4\}$
   - Es mayor o igual a cero en $(-\infty, 1/4]$
   - Es menor o igual a cero en $[1/4, \infty)$
2. Para la función $x \mapsto -\frac{1}{2}x - 6$:
   - Los ceros son $\{-12\}$
   - Es mayor o igual a cero en $(-\infty, -12]$
   - Es menor o igual a cero en $[-12, \infty)$
3. Para la función $x \mapsto 14x^2 - 5$:
   - Los ceros son $\{\sqrt{5/14}, -\sqrt{5/14}\}$
   - Es mayor o igual a cero en $(-\infty, -\sqrt{5/14}] \cup [\sqrt{5/14}, +\infty)$
   - Es menor o igual a cero en $[-\sqrt{5/14}, \sqrt{5/14}]$
4. Para la función $x \mapsto (x-3)^2 - 8$:
   - Los ceros son $\{3 + \sqrt{8}, 3 - \sqrt{8}\}$
   - Es mayor o igual a cero en $(-\infty, 3 - \sqrt{8}] \cup [3 + \sqrt{8}, +\infty)$
   - Es menor o igual a cero en $[3 - \sqrt{8}, 3 + \sqrt{8}]$
5. Para la función $x \mapsto -(2x+1)^2 + 16$:
   - Los ceros son $\{-2.5, 1.5\}$
   - Es mayor o igual a cero en $[-2.5, 1.5]$
   - Es menor o igual a cero en $(-\infty, -2.5] \cup [1.5, \infty)$
6. Para la función $x \mapsto x^2 - 5x - 1$:
   - Los ceros son $\{2.5 - \sqrt{29}/2, 2.5 + \sqrt{29}/2\}$
   - Es mayor o igual a cero en $(-\infty, 2.5 - \sqrt{29}/2] \cup [2.5 + \sqrt{29}/2, +\infty)$
   - Es menor o igual a cero en $[2.5 - \sqrt{29}/2, 2.5 + \sqrt{29}/2]$

□

Problema 3.4 (Dominios naturales III, 10 puntos)
Encuentra la función natural asociada a las siguientes reglas de correspondencia:

(a) $x \mapsto \sqrt{-4x + 1}$

(b) $x \mapsto \frac{x^2+1}{\sqrt{-\frac{x}{2}-6}}$

(c) $x \mapsto -\sqrt{14x^2 - 5}$

(d) $x \mapsto \frac{x+3}{x^2-6x+1}$

(e) $x \mapsto \sqrt{-4x^2 - 4x + 17}$

(f) $x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x^2-5x-1}}$

Hint: Usa los resultados de los Problemas 3.2 y 3.3.

Solución. En estos ejercicios usamos los resultados encontrados para el Problema 3.3.

(a) Para que $\sqrt{-4x+1}$ sea un número real, debemos asegurar que $-4x+1$ sea mayor o igual a cero. Según lo encontrado en el Problema 3.3, esto ocurren en $(-\infty, 1/4]$. Por lo tanto, la función natural asociada a esta regla de correspondencia es:

$$\begin{aligned} f : (-\infty, 1/4] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sqrt{-4x+1} \end{aligned}$$

(b) Para que $\frac{x^2+1}{\sqrt{-\frac{x}{2}-6}}$ sea un número real, debemos asegurar que $-\frac{x}{2}-6$ sea mayor a cero (debemos remover los puntos donde es cero). Según lo encontrado en el Problema 3.3, esto ocurren en $(-\infty, -12] \setminus \{-12\} = (-\infty, -12)$. Por lo tanto, la función natural asociada a esta regla de correspondencia es:

$$\begin{aligned} f : (-\infty, -12) &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{x^2+1}{\sqrt{-\frac{x}{2}-6}} \end{aligned}$$

(c) Para que $-\sqrt{14x^2-5}$ sea un número real, debemos asegurar que $14x^2-5$ sea mayor o igual a cero. Según lo encontrado en el Problema 3.3, esto ocurren en $(-\infty, -\sqrt{5/14}] \cup [\sqrt{5/14}, +\infty)$. Por lo tanto, la función natural asociada a esta regla de correspondencia es:

$$\begin{aligned} f : (-\infty, -\sqrt{5/14}] \cup [\sqrt{5/14}, +\infty) &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto -\sqrt{14x^2-5} \end{aligned}$$

(d) Para que $\frac{x+3}{x^2-6x+1}$ sea un número real, debemos asegurar que $x^2-6x+1 = (x-3)^2-8$ sea distinto a cero. Según lo encontrado en el Problema 3.3, esto ocurren en $\mathbb{R} \setminus \{3 \pm \sqrt{8}\}$. Por lo tanto, la función natural asociada a esta regla de correspondencia es:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \setminus \{3 \pm \sqrt{8}\} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{x+3}{x^2-6x+1} \end{aligned}$$

(e) Para que $\sqrt{-4x^2-4x+17}$ sea un número real, debemos asegurar que $-4x^2-4x+17$ sea mayor o igual a cero. Uno puede bosquejar la gráfica de $-4x^2-4x+17$ y encontrar que esto ocurre en $[-0.5-3/\sqrt{2}, -0.5+3/\sqrt{2}]$. Por lo tanto, la función natural asociada a esta regla de correspondencia es:

$$\begin{aligned} f : [-0.5-3/\sqrt{2}, -0.5+3/\sqrt{2}] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sqrt{-4x^2-4x+17} \end{aligned}$$

(f) Para que $\frac{x}{\sqrt{x^2-5x-1}}$ sea un número real, debemos asegurar que x^2-5x-1 sea mayor a cero (debemos remover los puntos donde es cero). Según lo encontrado en el Problema 3.3, esto ocurren en

$$(-\infty, 2.5-\sqrt{29}/2] \cup [2.5+\sqrt{29}/2, +\infty) \setminus \{2.5 \pm \sqrt{29}/2\} = (-\infty, 2.5-\sqrt{29}/2) \cup (2.5+\sqrt{29}/2, +\infty).$$

Por lo tanto, la función natural asociada a esta regla de correspondencia es:

$$\begin{aligned} f : (-\infty, 2.5-\sqrt{29}/2) \cup (2.5+\sqrt{29}/2, +\infty) &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{x}{\sqrt{x^2-5x-1}} \end{aligned}$$

$\square$